Кубок 7 ЛФИ

**s07.epilogue**

*Сначала — приговор, решение — после.*
*Алиса в стране чудес*

# Содержание

# Эпилог.

## Введение

Обработка данных в эксперименте — трудоёмкая и сложная область знаний. Тем не менее, в рамках школьной физики, а также на первых курсах института большая часть обработки сводится к применению ряда методов. Несмотря на то, что многие методы имеют границы применимости, их зачастую используют «вслепую», игнорируя эти границы. В рамках Эпилога мы будем обсуждать выход за эти границы и показывать, к чему это приводит. В некоторых случаях полученный результат будет абсурдным и весьма забавным.

Как правило, нам будут необходимы некоторые понятия из теории вероятности. Мы рекомендуем вам ознакомиться с ними самостоятельно. Для понимания этих понятий на прикладном уровне хорошо подойдёт методичка обработка результатов учебного эксперимента.

Кроме того, для многих частей задачи мы будем использовать следующий гугл колаб.

### Бесконечная точность

Как правило, в Эпилоге мы будем рассматривать *теоретические* примеры, в которых существует «абсолютная истина»: как мы придумали, так и будет. В то же время, в реальной физике величина без погрешности не имеет смысла.

Для примера рассмотрим длину некоторого стержня. Даже если у нас была бы идеальная линейка, способная проводить измерение бесконечно точно, мы бы всё ещё получали длину образца с погрешностью. Торцы образца не являются идеальной плоскостью: они имеют шероховатости, из-за чего возникает вопрос определения длины. Длина образца — это расстояние между какими шероховатостями? Даже если образец будет «идеально» отполирован, то возникает вопрос, по какой точке атома определить край образца?

Таким образом, всякий раз, как мы будем писать об «истинном значении» той или иной величины, мы подразумеваем, что это некоторая идеализация. Можно воспринимать данное «истинное значение», как величину, измеренную с настолько малой погрешностью, что она пренебрежимо мала в сравнении со всеми другими эффектами. Мы пренебрегаем этим вкладом в расчётах, но этот вклад всё же существует.

## Часть 1. Случайные величины и их средние значения

**Даня и проволока** Даня хочет измерить объём некоторой проволоки. Он измеряет её радиус в $n$ разных точках, измеряет её полную длину и пишет:

$$V = \pi \langle r \rangle^2 L$$

Будем считать, что длина измеряется точно, а радиус с равной вероятностью принимает значения то 0,4 мм то 0,3 мм (т.е. проволока неоднородна и где-то толще, где-то тоньше). На сколько процентов ошибётся Даня при расчётах по вышеописанной формуле, если сделает очень много измерений?

### ЦПТ

Очень часто в физике говорится о «нормальном распределении». Довольно удивительно: как правило величины имеют самые разные распределения, но упоминают почти всегда нормальное. Это связано с центральной предельной теоремой. Если есть последовательность независимых одинаково распределённых случайных величин с конечными математическим ожиданием и дисперсией, то их частичные суммы $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ будут распределны нормально:

$$\frac{S_n - \mu n}{\sigma\sqrt{n}} \to N(0{,}1), \text{ при } n \to \infty$$

Таким образом, если есть *как-то* распределённая величина, то среднее при повторных измерениях (также случайная величина) будет иметь нормальное распределение.

Преобразуем формулу ЦПТ:

$$S_n - \mu n \to \sigma\sqrt{n} N(0{,}1)$$

Разделим левую и правую части на $n$ и перенесём матожидание $\mu$ в правую сторону:

$$\langle X \rangle \to \mu + N\left(0, \sigma^2/n\right)$$

Как видно, при увеличении числа измерений значение среднего стремится к матожиданию, причём ошибка уменьшается, как корень из $n$. Иными словами, чтобы написать лишнюю значащую цифру (увеличить точность в 10 раз), надо потратить в 100 раз больше времени.

Не трудно заметить, что при условии, что матожидание ошибки не равно нулю, то с увеличением числа измерений такая ошибка уменьшаться не будет. Из-за этого систематическая погрешность намного опаснее случайной.

**Значащие цифры Дениса** Денис измеряет некоторую величину и может получить только 3 значащие цифры. Денис очень хочет записать себе 5 значащих цифр.

1. Сколько ему нужно сделать повторных измерений, чтобы он действительно имел право писать эти значащие цифры, если все виды погрешности в опытах Дениса можно считать чисто случанйми? Сколько времени затратит Денис, если на каждое измерение он тратит 3 секунды?

2. Сколько ему нужно сделать повторных измерений, чтобы он действительно имел право писать эти значащие цифры, если все виды погрешности в опытах Дениса нужно считать чисто систематическими?

**Костян 123** Во Втором Эпизоде Пятого Сезона Кубка ЛФИ предлагалось найти вероятность выпадения одной из сторон монеты с точностью по крайней мере в 4 значащие цифры. Задача может быть решена аналитически, но давайте рассмотрим численную симуляцию. Пусть при помощи компьютерного моделирования мы получаем результат выпадения монеты. Вопрос в том, сколько бросков требуется, чтобы найти достаточно значащих цифр.

1. Пусть мы знаем величину $p$ с погрешностью $\delta$. Оцените, какая может быть погрешность $\delta$, при которой первые 4 значащие цифры вероятности $p$ будут верны?
2. Оцените, чему равна погрешность 1 измерения, если при каждом запуске мы получаем либо результат 1 (выпал орёл), либо результат 0 (выпала решка), а искомое значение вероятности находится где-то около 0,5?
3. Сколько надо произвести запусков симуляции, чтобы уменьшить погрешность из пункта 2 до погрешности из пункта 1?

~~Вы спросили об этом во время разбора, так что получайте.~~

## Часть 2. Методы оценки погрешности

### Погрешность косвенных измерений

Как правило в эксперименте мы получаем косвенные результаты, из которых далее пересчитываем итоговые величины. Если итоговый результат представляет из себя функцию $n$ переменных, то погрешность $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ можно оценить следующим образом:

$$\sigma_f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\sigma_{x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\sigma_{x_2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\sigma_{x_n}\right)^2}. \tag{1}$$

Эта формула применима только если относительные отклонения всех величин малы:

$$\varepsilon_{x_1}, \varepsilon_{x_2}, \ldots, \varepsilon_{x_n} \ll 1,$$

а измерения проводятся вдали от особых точек функции $f$ (производные не должны обращаться в ноль или бесконечность). Ещё одно очень важное требование — независимость переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Довольно удобным оказывается частный случай, когда $f = x_1^{n_1}\ x_2^{n_2} \ldots x_k^{n_k}$. В этом случае формулу можно переписать через относительные погрешности:

$$\varepsilon_f = \sqrt{\varepsilon_{x_1}^2 n_1^2 + \varepsilon_{x_2}^2 n_2^2 + \ldots + \varepsilon_{x_k}^2 n_k^2}$$

**Никита и особые точки** Никита измеряет некоторую величину $x$. Согласно его измерениям величина $x$ распределена нормально со средним значением $\mu$ и среднеквадратичным отклонением $\sigma$. Далее Никита хочет оценить погрешность для функции $f(x)$ при помощи формулы выше. Приведите примеры $f(x)$, $\mu$, $\sigma < \mu/10$, для которых:

1. Оценка погрешности примерно в 10 раз больше реального среднеквадратичного отклонения.

2. Оценка погрешности примерно в 10 раз меньше реального среднеквадратичного отклонения.

В данном пункте вам можно и нужно работать вблизи особых точек функции. Рекомендуем заглянуть в гугл колаб.

**Никита и большие относительные погрешности** Никита[1] измеряет некоторую величину $x$. Согласно его измерениям величина $x$ распределена нормально со средним значением $\mu = 1$ и среднеквадратичным отклонением $\sigma$. Далее Никита хочет оценить погрешность для функции $f(x)$ при помощи формулы выше. Приведите примеры $\sigma$, для которых:

1. Оценка погрешности $f(x) = e^x$ примерно в 10 раз больше реального среднеквадратичного отклонения.

2. Оценка погрешности $f(x) = \operatorname{arctg} x$ примерно в 10 раз меньше реального среднеквадратичного отклонения.

В данном пункте вам можно и нужно рассматривать большие относительные погрешности.

**~~Независимые~~ Зависимые величины** Для понимания важности независимости величин давайте пронаблюдаем за случаем, когда это требование не выполняется. Пусть $\overline{x} = x_0, \sigma_x = \delta$, где $x_0 > 0$. Возьмём следующую случайную величину

$$y = (\xi_1 \cdot \xi_2 \cdot \ldots \cdot \xi_n) \cdot \frac{\zeta_{1,1}}{\zeta_{1,2}} \cdot \frac{\zeta_{2,1}}{\zeta_{2,2}} \cdot \ldots \cdot \frac{\zeta_{m,1}}{\zeta_{m,2}},$$

где $\xi_i = \sqrt[n]{x}$, $\zeta_{i,1} = \zeta_{i,2} = x$. Нетрудно заметить, что $y = x$, при этом погрешность $\sigma_y = \sigma_x = \delta$, поскольку это одинаковые случайные величины.

Однако, если «рассмотреть» $y$, как функцию некоторого числа ~~независимых~~ зависимых величин, а далее посчитать по формуле 1 (чего делать нельзя из-за того, что величины зависимы) можно получить самые разные значения.

1. Покажите, что $\sigma_y = 2\delta$,

2. Покажите, что $\sigma_y = \frac{1}{2}\delta$,

3. Покажите, что $\sigma_y$ может принимать любые положительные значения.

## Часть 3. Приборы и их погрешности

**Расчётное время выполнения пункта — 5 минут** Измерение времени содержит как случайную, так и систематическую погрешность. Естественно, они будут разными для каждого человека. Попробуйте измерить эти параметры для себя: 100 раз запустите секундомер, стараясь отмерить 3 секунды. Запишите полученные времена (которые будут немного отличаться от 3 секунд). Постройте гистограмму результатов. Посчитайте среднее отклонение от 3 секунд (систематическую погрешность) и среднеквадратичное отклонение (случайную погрешность). Сделайте выводы.

[1]Этот Никита — это уже другой Никита

**Расчётное время выполнения пункта — немного больше 5 минут** Вполне возможно, что при измерении большего времени погрешность вырастет: пока пройдёт много времени человек расслабится, допустит большую ошибку в остановке секундомера. Попробуйте изучить этот эффект.

**Семён и миллиметровая бумага** Семён снял некоторую зависимость $y(x) = kx + b$ и нанёс её на миллиметровую бумагу. Семён обладает идеальным глазомером, поэтому провёл наилучшую прямую, описывающую эти данные. Он хочет получить значение $k$ из этого графика, для этого отмечает на графике 2 удачные точки, записывает координаты и находит коэффициент наклона.

Рассматривая миллиметровую бумагу, как измерительный прибор, а координаты отмеченных точек, как измеряемые расстояния, оцените относительную погрешность «измерения» коэффициента наклона. Считайте, что размеры графика равны 12 см на 12 см.

## Часть 4. Метод наименьших квадратов

Графический метод обработки данных хорош, но имеет ряд недостатков. Как мы убедились в предыдущей части, даже с идеальной прямой, аппроксимирующей, данные погрешность составит около 1%. Для некоторых экспериментов 1% это много. Таким образом, нам потребуется аналитический метод превращать результаты эксперимента в параметры зависимости.

Пусть у нас существует некоторая теоретическая модель $f(x|\theta)$, где $\theta$ — некоторый набор параметров, которые мы хотим подобрать. Мы хотим найти такой набор параметров, что он «максимально хорошо» описывает наш экспериментальный набор данных. Будет разумным шагом взять величину ошибки предсказания $\Delta y_i = f(x_i|\theta) - y_i$ как некоторый «штраф», подсчитать сумму всех ошибок на экспериментальном наборе данных, а далее минимизировать этот «штраф»: чем он меньше, чем наша зависимость ближе к экспериментальным данным. Поскольку каждая ошибка должна давать «штрафной» вклад в сумму, то суммировать необходимо неотрицательную функцию от этой ошибки, например $|\Delta y_i|$ или $(\Delta y_i)^2$.

Намного удобнее работать с гладкой функцией, поэтому остановимся на выборе $(\Delta y_i)^2$. Введём сумму квадратов расстояний между этой теоретической моделью и экспериментальными данными $S(\theta)$. На заданной экспериментальной выборке такая сумма будет функцией, которая зависит от вектора параметров.

$$S(\theta) = \sum_{i=1}^{n} \left(f(x_i|\theta) - y_i\right)^2.$$

Набор параметров, который обеспечивает минимум данной функции будет весьма «хорошей» аппроксимацией кривой.

Строго говоря, в математике существует теорема Гаусса — Маркова, которая утверждает, что данная аппроксимация будет лучшей в случае, если:

1. Зависимость линейна по набору параметров $\theta$,
2. Значения $x$ известны точно: $\sigma_x = 0$,
3. Все погрешности $\sigma_y$ не носят систематического характера: матожидание для данного $x_i$ равно нулю $\mathbb{E}(\varepsilon_i) = 0$.

4. Все погрешности $\sigma_y$ не зависят друг от друга: их попарная ковариация равна 0 $\mathrm{Cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$.

5. Все погрешности $\sigma_y$ имеют одинаковую дисперсию $D(\sigma_y) = \mathrm{const}$,

Обратите внимание, что $f(x|\alpha, \beta) = \alpha x^2 + \beta$. является линейной по параметрам $\alpha$ и $\beta$ и не нарушает первого условия теоремы, хоть данная зависимость и не линейна по $x$.

**Рассмотрим пример:**

$$y = \alpha x$$

В данном случае набор параметров состоит из всего одного параметра $\alpha$. Найдём минимум, взяв производную и приравняв её к нулю:

$$\frac{\partial S(\alpha)}{\partial \alpha} = \sum_{i=1}^{n} 2x_i \left(\alpha x_i - y_i\right) = 0.$$

Поделим это выражение на $2n$ и перейдём к средним значениям величин

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{n} = \langle x^2 \rangle_i, \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i x_i}{n} = \langle xy \rangle_i$$

Окончательно получаем:

$$0 = \alpha \langle x^2 \rangle_i - \langle xy \rangle_i \Rightarrow \alpha = \frac{\langle xy \rangle_i}{\langle x^2 \rangle_i}$$

Для оценки погрешности воспользуемся следующей формулой:

$$\sigma_\alpha = \sqrt{\frac{1}{n-1} \left( \frac{\langle y^2 \rangle_i}{\langle x^2 \rangle_i} - \alpha^2 \right)}$$

Здесь $-1$ показывает число степеней свободы в системе.

### «Обычный» МНК

**Олег и вывод формул МНК** Олег решил аналитически вывести формулы для оценки параметров зависимости

$$y = ax^2 + be^x + c$$

при помощи МНК. Считая все $x_i$ $y_i$ известными, составьте систему уравнений, из которой можно составить оценку на параметры $a$, $b$, $c$.

**Дима и идеальные приборы** Диме дали идеальные вольтметр и амперметр[2], а также реальные вольтметр и амперметр, погрешность которых исключительно случайная, ни от чего не зависит, её дисперсия одинакова во всех режимах работы. Дима решил использовать каждый раз 1 идеальный и 1 неидеальный прибор. Он рассматривает следующие случаи:

1. $U_э = \alpha I_0 + \varepsilon$, $I_э = I_0$, где $\varepsilon$ — случайные, одинаково распределённые погрешности, $U_э$, $I_э$ — экспериментальные данные, $I_0$, $U_0$ — гипотетические «правильные» значения этих величин.

[2] Дима теоретик, эти приборы не существуют

2. $U_э = \alpha I_0,\ I_э = I_0 + \varepsilon$, где обозначения аналогичны.

Дима подставляет результаты в формулу расчёта коэффициента наклона. Каково матожидание результата полученного Димой[3]? Какие требования теоремы Гаусса—Маркова будут выполняться в каждом из этих случаев?

**Вова и плохой вольтметр** Вове дали вольтметр, который всегда показывает 0 В. Ему сказали, что этот вольтметр корректно работает, но только в диапазоне до 300 В и с погрешностью всего–навсего 900 В. Вова решил исследовать резистор при помощи этого вольтметра и идеального амперметра[4], далее рассчитать сопротивление и его погрешность, используя исключительно формулы МНК (и ничего другого). Какие сопротивление и его погрешность получит Вова? Какой сделает из этого вывод? В чём он ошибся? Какие требования теоремы Гаусса—Маркова будут выполняться в данном случае?

[3]Он теоретик, так что не планирует делать эксперимент, просто посчитает всё теоретически.

[4]В лаборатории Вовы низкое качество вольтметров компенсируется идеальным качеством амперметров.

**Аня и маятник** Аня хочет определить период колебаний маятника максимально точно. Она исследует маятник следующими тремя способами:

1. Запускает секундомер, когда маятник в некотором положении, записывает моменты [5] когда маятник пройдёт 1, 2, …, $N$ периодов. Рассчитывает коэффициент наклона функции $t(n) = nT_0$ при помощи МНК.

2. Запускает секундомер, когда маятник находится в некотром положении. Останавливает время когда маятник прошёл 1 период. Заново запускает в некоторый момент, останавливает, когда маятник прошёл 2 периода. И так вплоть до $N$ периодов.

3. Запускает секундомер, когда маятник в некотором положении, останавливает спустя $N$ периодов. Считает $T_0 = T_{\text{полн}}/N$

Считайте что каждый запуск, остановка, фиксация момента имеют одинаковую ошибку по времени: $\delta_t = \varepsilon + \delta_0$, которая содержит как случайный так и систематический вклады. Безотносительно затраченного времени какой из способов лучше и почему? Если учитывать, что один из способов длится дольше и за это время можно было бы проделать несколько повторных опытов другим методом, то какой из методов окажется лучше? Какие требования теоремы Гаусса—Маркова будут выполняться в данном случае?

Посмотрите на численное моделирование этих методов.

### Взвешенный МНК

Как правило в физике сложно выполнить условие $\sigma_y = \text{const}$. На помощь приходит взвешенный МНК. Логика очень похожа на обычный МНК, но теперь каждая точка даёт «штраф» обратно пропорциональный её погрешности: наилучшая аппроксимация имеет право «достаточно далеко» отходить от точек с высокой погрешностью, но должна быть расположена «поближе» к точкам с низкой погрешностью. В итоге получаем:

$$S(\theta) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\left(f(x_i|\theta) - y_i\right)^2}{\sigma_i^2}.$$

Все записанные ранее формулы продолжают работать. Единственное отличие — средние теперь берутся с учётом веса. Важно понимать, что в одном отдельно взятом случае взвешенный МНК может оказаться даже хуже обычного МНК, однако, дисперсия предсказываемых величин оказывается меньше на большой выборке.

**Сравнение взвешенного и обычного МНК** Изучите разброс результатов, которые предсказывают МНК обычный и взвешенный. Ответьте на ряд вопросов:

1. Кто лучше? Что служит мерой «хорошести» в данном случае?

2. Есть ли качественная разница между $var = x^2$ и $var = x$? Количественная? Почему?

3. Есть ли качественная разница между $var = x$ и $var = x/100$? Количественная? Почему?

4. Что происходит в случае $var = 1$?

[5] Во многих секундомерах есть функция отметить время, не останавливая измерений.

### Нелинейный МНК

Вообще говоря, когда не выполняется условие 1 нельзя утверждать что МНК — лучшая оценка. Тем не менее, для нелинейных зависимостей доказать обратное также не получается. Далее мы будем игнорировать требование линейности и делать вид, что это может и не лучшая, но по крайней мере неплохая оценка.

В случае с линейным МНК вывести формулу не трудно. В случае с нелинейной зависимостью получить линейную систему не выйдет. Как правило, аналитически такое невозможно решить. На помощь приходят численные расчёты. Если нельзя найти минимум аналитически, мы будем искать его численно. Об алгоритмах поиска минимума в этой задаче мы говорить не будем.

Тем не менее, очень интересно посмотреть на то, как выглядит функция $S(\theta)$.

**Михаил и функция ошибок для нелинейного МНК** Михаил изучает функцию вида $y = \exp(-\beta t)\sin(\alpha t)$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

Из эксперимента он получил 4 точки

$$y(1) = 0{,}585,\ y(2) = -0{,}614,\ y(3) = 0{,}282,\ y(4) = 0{,}085.$$

Составьте зависимость $S(\alpha, \beta)$. Нарисуйте график этой зависимости, найдите минимальное значение $S$ и параметры $\alpha_{\min}$, $\beta_{\min}$, при которых достигается это значение.

**Функция ошибок для нелинейного МНК 2** Изучим эту же функцию, но не 4 точки. Даже прямую по 4 точкам грустно строить, а тут осциллирующая кривая. Рассмотрите поведение функции $S(\alpha, \beta)$ в зависимости от числа точек $N$. Как ведут себя локальные минимумы при увеличении $N$? Объясните данное явление.

В данном пункте имеет смысл заглянуть в гугл колаб.

**Функция ошибок для нелинейного МНК 3** Вероятно, вы заметили, что из-за наличия в функции синуса может наблюдаться несколько точек минимумов и максимумов, к счастью, в предыдущем пункте экспоненциальное затухание спасало. Давайте рассмотрим ещё более страшную историю: $y = \sin(\alpha t + \beta)$. Получите для этого случая вид функции ошибок. Попробуйте подобрать параметры, чтобы при неправильных $\alpha$ и $\beta$ точки хорошо ложились на график. Объясните, почему даже на больших значениях $N$ всё ещё видно два минимума.

## Отдельная часть про Филиппа

В данной части вам предлагается воспользоваться знаниями, полученными ранее. Мы не будем говорить, какой именно раздел помогает разобраться в данном пункте[6].

**Филипп и наклонная плоскость** Филипп спускает брусок с наклонной плоскости. Как известно, ускорение груза будет следующим:

$$a = \mathrm{g}\left(\cos\alpha - \mu\sin\alpha\right)$$

Филипп выбирает некоторую точку и обозначает её, как $x = 0$. Далее он начинает отсчитывать время с момента, когда брусок проедет через эту точку. Тогда уравнение движения принимает вид:

$$x(t) = v_0 t + \frac{at^2}{2}$$

Филипп снимает зависимость времени от координаты в 10 разных точках. При этом все координаты измерены достаточно точно, а ошибка времени содержит в себе только случайный характер: Филипп всегда запускает секундомер и фиксирует время немного позже правильного момента, но две систематические ошибки компенсируют друг друга. Считайте что все ошибки не коррелируют друг с другом[7]. Филипп хочет найти начальную скорость и ускорение. Для этого пробует 3 разных способа аппроксимации:

1. Линейный МНК для зависимости средней скорости от времени $\frac{x}{t}(t) = v_0 + \frac{at}{2}$.
2. Нелинейный МНК зависимости координаты от времени $x(t) = v_0 t + \frac{at^2}{2}$.
3. Нелинейный МНК для какого-то страшного корня $t = \dfrac{\sqrt{2ax + v_0^2} - v_0}{a}$.
4. Какой-нибудь линейный МНК с весами.

Какой из методов будет работать лучше и почему? Можно ли придумать взвешенный линейный МНК для этой зависимости? Изучите данный пример из общих аналитических соображений, а также численно.

[6] Так исторически сложилось, что Филипп стал целой частью.

[7] Они не обязаны быть независимыми, если есть внешний фактор, от которого зависит реакция Филиппа.