



*Приготовьтесь к осложнениям.*

*Доктор Хаус.*

## Хаос и дискретные модели

В данной задаче вам придется применять как навыки аналитических вычислений, так и навыки численного моделирования. Но это не так страшно, как может показаться на первый взгляд.

### Среда программирования для задачи

Для того, чтобы вам не пришлось ничего программировать, мы подготовили [тетрадку](#) в среде Google Colab. Можно использовать без смс, но с регистрацией.

Проходите по [ссылке на тетрадку](#) (на всякий случай, [вот](#) она еще раз), заходите в свой гуглакаунт, нажимаете на выполнение кода в любой ячейки (это такая кнопка плей), вам сообщают радостную новость о том, что данный код написал некий Елисеев Максим, вы соглашаетесь с этим и [тетрадка](#) готова к использованию.

Подробно про то, как пользоваться тетрадкой рассказано [в данном видео](#) (тем самым Максимом Елисеевым). Если когда у вас останутся вопросы о том, как пользоваться данной тетрадкой, то вы можете их задать в личные сообщения [вот этому человеку](#). Не стесняйтесь, он готов и заряжен отвечать 25 (двадцать пять) на 7.

**Замечание.** Большая часть тетради это обучение, которое пропускать не надо, и задание 10-11 классов, которое вы можете пропустить (в крайнем случае нет). Основная работа будет в разделе «Дискретная модель» и «Путь Точки».

**Замечание.** Вы можете использовать любую другую среду для решения данной задачи, но мы не гарантируем, что другие численные методы сойдутся к правильному решению. И есть риск, что мы не сможем вам с этим никак помочь.

## Дискретные модели

Во многих задачах бывает удобно переходить к дискретному времени и наблюдать за динамикой изменения некоторой величины. Например, мы можем обозначить  $x_n$  популяцию некоторого биологического вида в момент времени  $t_n$  (к примеру, в год с номером  $n$ ). Тогда уравнение, описывающее динамику изменения популяции в самом простом случае, может иметь вид

$$x_{n+1} = \lambda x_n,$$

где  $\lambda = \text{const} > 0$  — коэффициент, который определяет условия жизни данного вида. Ясно, что если  $\lambda > 1$ , то популяция будет неограниченно расти, если  $\lambda = 1$ , то ее значение будет из года в год постоянным, если  $\lambda < 1$ , то популяция вымрет. В этой части задачи мы будем анализировать схожие модели.

Правую часть уравнения мы будем обозначать  $f(x_n)$ . Если некоторое значение  $x^*$  удовлетворяет условию  $f(x^*) = x^*$ , то такой  $x^*$  мы будем называть положением равновесия.

Если мы два раза подействуем нашей «функцией», т. е. запишем выражение вида  $f(f(x))$ , то такое преобразование мы будем называть квадратичным и будем обозначать как  $f^2(x)$ .

При действии нашей функцией  $n$  раз мы будем использовать обозначение  $f^n(x)$ . Ясно, что степень в данном случае не равносильна понятию степени из алгебры.

### Путь точки. Линейный случай.

Рассмотрите в тетради клетку «Путь Точки». В ней задана «функция»

$$f(x) = \lambda \cdot \min [(1 - x), x], \quad x_{n+1} = f(x_n)$$

где  $\lambda = \text{const} > 0$ . Во всех пунктах этой части задачи мы будем рассматривать только значения  $x \in [0, 1]$ .

1. (0,5 балла) В каких пределах может изменяться параметр  $\lambda$ , чтобы  $x_n$  при любом  $n$  принадлежал отрезку от  $[0, 1]$ ?
2. (0 баллов) Изобразите  $f(x)$ .
3. (0,5 балла) Качественно изобразите  $f^2(x)$  и  $f^4(x)$  при значениях параметра  $\lambda \neq 0$ .
4. (0,5 балла) Найдите зависимость числа положений равновесия от параметра  $\lambda$  у системы, задаваемой «функцией»  $f(x)$ . Для тех значений  $\lambda$ , где число положений равновесия наибольшее, найдите зависимость положений равновесия  $x^*(\lambda)$ .
5. (0,3 балла) Найдите зависимость числа положений равновесия от параметра  $\lambda$  у системы, задаваемой «функцией»  $f^2(x)$ . Для любого параметра  $\lambda$ , где число положений равновесия максимально, разработайте графический метод отыскания этих положений равновесия.
6. (0,7 баллов) Чему равно максимальное конечное число положений равновесия у системы, задаваемой «функцией»  $f^n(x)$ ?
7. (1,3 балла) Для «функции»  $f(x)$  и  $\lambda = 1.5$  получите последовательность  $x_n$ , если  $x_0 = 0,6$ ,  $x_0 = 0,4$  и  $x_0 = 0,139$ . Результат представьте в виде графика, на котором будут изображены  $f(x)$ , а также  $g(x) = x$  или в виде первых сорока значений последовательности  $x(n)$ . Объясните полученный результат.
8. (1,7 баллов) Для «функции»  $f^2(x)$  и  $\lambda = 1.5$  получите последовательность  $x_n$ , если  $x_0 = 0,6$ ,  $x_0 = 0,61$ . Результат представьте в виде графика, на котором будут изображены  $f(x)$ , а также  $g(x) = x$  или в виде первых сорока значений последовательности  $x(n)$ . Объясните результат.

Попробуйте найти (или изобразить) зависимости для других начальных значений.

9. (1 балл) Откройте клетку тетради в разделе «Дискретная модель. Линейный случай». Она умеет строить зависимость значений точек, отвечающих положениям равновесия для функции  $f^n(x)$  от параметра  $\lambda$ . Постройте данный график. Какие особенности данного графика вы можете выделить? Перечислите все свойства, которые сможете найти.

### Путь Точки. Квадратичный случай.

Модифицируя код в клетке «Путь Точки», проанализируйте следующую «функцию»

$$f(x) = \lambda x(1 - x),$$

где  $\lambda = \text{const} > 0$ .

**Примечание.** Эта «функция» встречается в самых разных разделах науки. От диффузии до экономики.

Во всех пунктах этой части задачи мы будем рассматривать только значения  $x \in [0, 1]$ .

10. (0,5 балла) В каких пределах может изменяться параметр  $\lambda$ , чтобы  $x_n$  при любом  $n$  принадлежал отрезку от  $[0, 1]$ ?
11. (0,5 балла) Изобразите  $f(x)$ . Найдите, при каких  $\lambda$  число положений равновесий наибольшее. Как зависят данные положения равновесия от  $\lambda$ ?
12. (0,5 балла) Изобразите  $f^2(x)$  при любом значении параметра  $\lambda \neq 0$ .
13. (0,5 балла) Для «функции»  $f(x)$  и  $\lambda = 2$  и получите последовательность  $x_n$ , если  $x_0 = 0,5$ ,  $x_0 = 0,4$  и  $x_0 = 0,33$ . Результат представьте в виде графика, на котором будут изображены  $f(x)$ , а также  $g(x) = x$  или в виде первых сорока значений последовательности  $x(n)$ . Объясните полученный результат.
14. (0,5 балла) Для «функции»  $f^2(x)$  и  $\lambda = 2$  получите последовательность  $x_n$ , если  $x_0 = 0,1$ ,  $x_0 = 0,16$ . Результат представьте в виде графика, на котором будут изображены  $f(x)$ , а также  $g(x) = x$  или в виде первых сорока значений последовательности  $x(n)$ . Объясните результат.

Попробуйте найти (или изобразить) зависимости для других начальных значений  $x$ .

15. (1 балл) Откройте клетку тетради в разделе «Дискретная модель. Квадратичный случай». Она умеет строить зависимость значений точек, отвечающих положениям равновесия для функции  $f(x)$  от параметра  $\lambda$ . Задайте максимальное значение  $\lambda$  и постройте данный график. Какие особенности данного графика вы можете выделить? Перечислите все свойства, которые сможете найти.

Первая подсказка — 16.05.2022 14:00 (МСК)

Вторая подсказка — 18.05.2022 14:00 (МСК)

Окончание пятого тура — 20.05.2022 22:00 (МСК)