Hint 2

ВАЖНО! Задача является одновременно и хинтом, и альтернативой к основной задаче. Три важных момента:

1. Вы можете продолжать присылать решение основной задачи.
2. В любой момент до финального дедлайна вы можете перейти на решение *альтернативной задачи*. Если вы это делаете, то в самом начале решения напишите: *Я перехожу на решение альтернативной задачи!* В этом случае Штрафной коэффициент за альтернативную задачу будет равен
$$0{,}7 \cdot \sum_i \frac{k_i \cdot p_i}{10},$$
где p_i — балл за пункт, а k_i — штрафной коэффициент за соответствующий пункт на момент перехода на Альтернативную задачу. Другими словами, максимальный балл за альтернативную задачу равен максимальному баллу, который вы можете получить в момент перехода на нее, умноженному на 0,7. Заметим, что штрафной коэффициент не может быть меньше 0,1. Также напоминаем, что решения основной задачи с этого момента не проверяются. Будьте внимательными!
3. Задача состоит из нескольких пунктов. Штрафной множитель, заработанный **до этого** применяется ко всем пунктам. В дальнейшем каждый пункт оценивается как отдельная задача. Если вы присылаете решение без какого-либо пункта, то его решение считается Incorrect. Более подробно о начислении баллов для составных задач смотрите в Правилах проведения Кубка.

Альтернативная задача

Часть 1. Фазовые портреты

1. *(0,5 балла)* Материальная точка единичной массы находится в состоянии покоя. На точку начинает действовать постоянная сила F. Изобразите фазовый портрет такого движения при шести различных значениях силы F.
2. *(1 балл)* Заряженная частица движется в поле равномерно заряженной плоскости. Заряд плоскости и частицы имеют одинаковый знак. Если частица долетает до плоскости, то она пролетает сквозь нее. Изобразите все возможные типы фазовых портретов такой системы, при различных начальных условиях.

Часть 2. Две звезды

Рассмотрим систему, состоящую из двух звезд одинаковой массы, движущихся вокруг общего центра масс по окружностям с постоянными по модулю скоростями.

3. *(0,5 балла)* Докажите, что окружности, по которым движутся звезды, совпадают.

Введем условную систему единиц. Будем считать, что звезды имеют массу $m = 1/2$, период обращения 2π, радиус круговых орбит звезд $a = 1$, гравитационная постоянная $G = 1$. Пусть помимо двойной звезды в пространстранстве движется планета, масса которой настолько мала по сравнению с массой звезд, что ее вилянием на их движение можно пренебречь. Звезды взаимодейсвуют с планетой по закону всемирного тяготения. Рассмотрим случай, когда планета движется вдоль прямой линии, проходящей через общий центр масс звезд и ортогональной плоскости их движения: $x \equiv 0, y \equiv 0, z = z(t)$.

4. *(1,5 балла)* Запишите уравнения движения планеты и постройте фазовый портрет на плоскости $z, \dot{z}$.

Пусть звезды движутся по эллипсам относительно общего центра масс с эксцентриситетом e. Тогда уравнения движения усложняются:

$$\ddot{z} = -\frac{z}{\left((1 - e\cos E)^2 + z^2\right)^{3/2}}, \quad E - e\sin E = t.$$

5. *(1,5 балла)* Постройте сечение Пуанкаре на плоскости $z, \dot{z}$ для различных значений эксцентриситета: $e = 0,\ 0.1,\ 0.3,\ 0.5,\ 0.7,\ 0.9$. За шаг отображения возьмите $t = 2\pi$, начальные условия $0 \le z(0) \le 3,\ \dot{z}(0) = 0,\ E = 0$.
6. *(3 балла)* Укажите начальные условия, для которых реализуются следующие режимы движения:
   (a) планета покоится в центре масс двойной системы (решение Эйлера);
   (b) затухающие колебания около центра масс;
   (c) периодические колебания;
   (d) колебания с нарастающей амплитудой, завершающиеся уходом планеты на бесконечность;
   (e) колебания с нарастающей амплитудой, но без ухода на бесконечность (осциллирующие движения).

Часть 3. Путь точки. Линейный случай II

Пройдите в альтернативную тетрадку. Рассмотрите в тетради клетку «Путь Точки». В этом разделе анализируется следующая «функция»: $\{\lambda x\}$ — дробная часть λx, где $\lambda = \text{const} > 0$. Во всех пунктах этой части задачи мы будем рассматривать только значения $x \in [0, 1]$.

7. *(0,5 балла)* Изобразите $f(x)$ для $\lambda = 2$.
8. *(0,5 балла)* Качественно изобразите $f^2(x)$ и $f^4(x)$ при значениях $\lambda = 2$, $\lambda = 2{,}5$, $\lambda = 4$.
9. *(0,5 балла)* Найдите зависимость числа положений равновесия от степени функции при $\lambda = 2$.
10. *(0,5 балла)* Откройте клетку тетради в разделе «Дискретная модель. Линейный случай». Измените «функцию» на ту, что изучается в альтернативной задаче. В этом

разделе изображаются все значения, которые получается после большого количества отображений при λ из диапазона от 10 до 20. Попробуйте проанализировать полученный результат.