

# Кубок 7 ЛФИ

9.s07.e02

## Hint 1

**Дробно-линейные рекуррентные уравнения.** Рассмотрим рекуррентное уравнение вида

$$x(n) = \frac{ax(n-1) + b}{cx(n-1) + d}.$$

Такое уравнение называется дробно-линейным (потому что это дробь, числитель и знаменатель которой — линейные функции).

Для решения дробно-линейных рекуррентных уравнений используется следующий алгоритм:

1. поиск неподвижных точек  $x_1, x_2$ ;
2. замена  $X(n) = \frac{x(n)-x_1}{x(n)-x_2}$  при  $x_1 \neq x_2$ ;
3. рекуррентное уравнение преобразуется к виду  $X(n) = \lambda X(n-1)$ , где  $\lambda$  может быть выражена как  $\lambda = \frac{a-cx_1}{a-cx_2}$ ;
4. решением рекуррентного уравнения вида  $X(n) = \lambda X(n-1)$  является

$$X(n) = X(1)\lambda^{n-1}.$$

Рассмотрим алгоритм на простом примере  $x(1) = 0, a = 1, b = 2, c = 2, d = 1$ :

$$x(n) = \frac{1x(n-1) + 2}{2x(n-1) + 1}.$$

Для неподвижных точек:

$$x_{1,2} = \frac{x_{1,2} + 2}{2x_{1,2} + 1} \Rightarrow x_{1,2} = \pm 1.$$

Тогда  $X(n) = \frac{x(n)-1}{x(n)+1}$ . Воспользуемся  $x(n) = \frac{1x(n-1)+2}{2x(n-1)+1}$  и получим:

$$X(n) = \frac{\frac{1x(n-1)+2}{2x(n-1)+1} - 1}{\frac{1x(n-1)+2}{2x(n-1)+1} + 1} = \frac{1 - x(n-1)}{3x(n-1) + 3} = -\frac{1}{3} \frac{x(n-1) - 1}{x(n-1) + 1} = -\frac{1}{3} X(n-1).$$

Поскольку  $X(1) = \frac{x_1}{x_2} = -1$ , то  $X(n) = -1 \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ . Воспользуемся обратной заменой  $x = -\frac{X+1}{X-1}$  и получим:

$$x(n) = -\frac{\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} - 1}{\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} + 1}.$$

**Неоднородные линейные рекуррентные уравнения.** Рассмотрим рекуррентное уравнение вида

$$ax(n+2) + bx(n+1) + cx(n) = D(n).$$

Такое уравнение называется неоднородным линейным рекуррентным уравнением второго порядка. Его решение можно найти в виде:

$$x(n) = \underbrace{A\lambda_1^{n-1} + B\lambda_2^{n-1} + x^*(n)}_{x_0(n)},$$

где  $x_0(n)$  является решением однородного рекуррентного уравнения, а  $x^*$  — любым решением неоднородного. Таким образом для поиска решения можно сформулировать следующий алгоритм:

1. Решить уравнение  $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ . Корни этого уравнения в дальнейшем можно будет подставить в общее решение.
2. *Угадать* одно решение уравнения  $ax(n+2) + bx(n+1) + cx(n) = D(n)$ . При постоянной  $D(n) = D$  несложно придумать  $x^* = D/(a+b+c)$ .
3. Из граничных условий найти константы  $A$  и  $B$ .

Рассмотрим алгоритм на следующем примере:

$$2x(n+2) - 5x(n+1) + 2x(n) = -1, \quad \text{с граничными условиями } x(1) = 0, x(100) = 1.$$

Найдём  $\lambda$ :

$$2\lambda^2 - 5\lambda + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_1 = 2, \lambda_2 = \frac{1}{2}.$$

*Угадаем*  $x^* = 1$ . В самом деле:

$$2 - 5 + 2 = -1.$$

Таким образом, решением данного уравнения будет любая функция вида:

$$x(n) = A \cdot \left(\frac{2}{1}\right)^{n-1} + B \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 1.$$

Константы  $A$  и  $B$  найдём из граничных условий:

$$\begin{cases} A + B + 1 = 0, & \text{из условия } x(1) = 0 \\ A \cdot 2^{99} + \frac{1}{2} + 1 = 1, & \text{из условия } x(100) = 1. \end{cases}$$

Откуда:

$$\begin{cases} B = -A \cdot 2^{99+99}, \\ A(1 - 2^{198}) = -1. \end{cases}$$

Окончательно получаем:

$$x(n) = \frac{1}{1 - 2^{198}} \cdot (2)^{n-1} - \frac{2^{198}}{1 - 2^{198}} \cdot \left(\frac{2}{1}\right)^{n-1} + 1.$$