



Кубок VI ЛФИ

9.s06.e05

*Концовка не так важна, как моменты, ведущие к ней
To the Moon*

Содержание

Общее	2
1 Кинематика СТО	2
Вычисление расстояний в разных координатах	2
Постулаты СТО	3
Преобразования Галилея и Лоренца	4
Пространство-время Минковского	5
Эффекты релятивистской кинематики	6
Парадокс близнецов	7
Сложение скоростей	8
2 Классическая черная дыра	9

Общее

Во Втором Эпизоде у 9-10 классов мы говорили с Участниками Кубка ЛФИ про время, а в 11 классе мы предложили задачу, которая красиво решалась геометрическим методом. В Третьем Эпизоде 10-11 классов Участникам предлагалось познакомиться с вариационным принципом и применением симметрии для анализа распространения света в градиентных средах.

~~Это вжжжж неспроста~~ Все это было неспроста.

При изучении объектов, которые движутся с большими скоростями (со скоростями, сопоставимыми со скоростью света), классические законы механики Ньютона становятся неприменимыми и дают результаты, которые противоречат эксперименту. Для описания движения таких объектов был разработан отдельный раздел физики, называемый *специальной теорией относительности*. Продолжая накапливать экспериментальные данные, в частности занимаясь вопросами гравитации, было выяснено, что теорию можно развивать дальше и была создана *общая теория относительности*.

Данные разделы физики разговаривают на языке геометрии и используют например такие понятия как: метрика, интервал, кривизна и так далее. Кроме того, в этих разделах используется понятия действия и вариационного принципа.

В этом Эпизоде мы расскажем вам про этот особый язык, то как он работает, и какие результаты с помощью него могут быть получены и осознаны уже сейчас.

В разделе 1 мы разберем вопросы, связанные со специальной теорией относительности (СТО), после которого мы убедимся в том, что СТО не достаточно для описания таких объектов как черная дыра (раздел 2) и предложим Участникам 10-11 классов перейти к общей теории относительности.

Успехов!

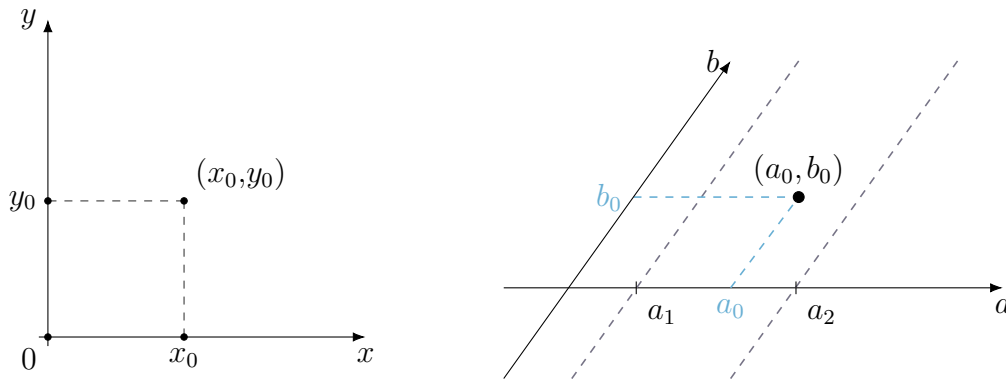
Кот Чарльз

1 Кинематика СТО

Специальная теория относительности (СТО) является физической теорией, нашедшей огромное число практических применений, активно использующая язык геометрии, а именно — геометрии пространства-времени Минковского. В этом разделе мы будем изучать кинематические аспекты СТО.

Вычисление расстояний в разных координатах

Рассмотрим двумерную декартову систему координат. Тогда положение точек будет задаваться парой чисел (x, y) . Чтобы построением найти координату точки по одной из осей, нам нужно провести через эту точку прямую, параллельную второй оси до пересечения с первой. Данный алгоритм является общим и работает и в случае неперпендикулярных друг другу осей. Из этого же следует, что линиями постоянных координат по одной оси будут являться прямые, параллельные второй оси.



Траекторией в такой системе координат будет называться зависимость одной координаты от другой, например, $y(x)$. Расстояние в такой системе координат определяется с помощью теоремы Пифагора, то есть малый элемент длины записывается так:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2.$$

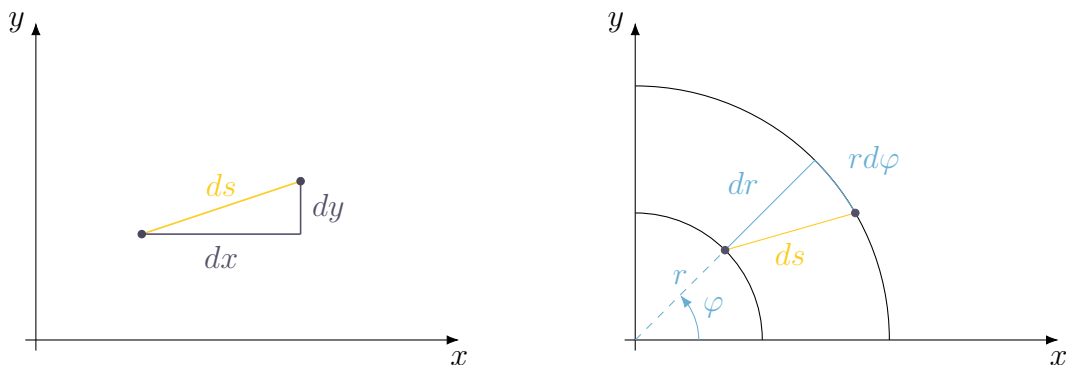
Заметим, что в случае неперпендикулярных осей расстояние будет определяться по теореме косинусов:

$$ds^2 = da^2 + db^2 + 2dadbcos\alpha,$$

где α — угол между осями a и b .

Декартова система координат — это не единственный способ задать положение точки на плоскости. Существует множество других вариантов, например полярные координаты, в которых положение точки задается расстоянием от начала координат r и углом φ , отсчитанным от некоторой оси (см. рисунок). При переходе к полярным координатами расстояние будет иметь вид:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2.$$



Постулаты СТО

В основе специальной теории относительности лежат следующие постулаты:

1. **Законы физики одинаковы во всех инерциальных системах отсчёта.**
2. **Скорость света в вакууме постоянна.**

Первый постулат понятен — мы предполагаем, что процессы во всех инерциальных системах отсчёта (ИСО) протекают одинаково, поэтому и физические законы записываются одинаковым образом.

Второй же выглядит весьма удивительным, но именно он является отправной точкой построения СТО. Факт постоянства скорости света был подтвержден в различных экспериментах, проведенных во второй половине XIX века (опыты Физо, Майкельсона-Морли и др.).

Преобразования Галилея и Лоренца

В этом разделе мы будем рассматривать переход из одной ИСО K в другую ИСО K' .

Рассмотрим движение материальной точки из начала координат вдоль оси x со скоростью v . При переходе из лабораторной системы отсчёта в систему отсчета этой точки координаты и время преобразуются по закону

$$x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t.$$

Эти преобразования называется преобразованиями Галилея. Из них следует, что скорости в этой системе отсчета равны

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'} = v_x - v, \quad v'_y = \frac{dy'}{dt'} = v_y, \quad v'_z = \frac{dz'}{dt'} = v_z.$$

Такой закон преобразования скоростей противоречит второму постулату СТО. Подтвердим это одним классическим примером. Представьте, что человек бежит с фонариком в руке. Тогда в системе отчёта, связанной с бегущим человеком, фотоны (или электромагнитная волна) имеют скорость, равную скорости света вакууме (в дальнейшем будем обозначать её c , численное значение будем считать примерно равным $3 \cdot 10^8$ м/с). В системе отсчета, связанной с неподвижным наблюдателем, согласно Галилеевским преобразованиям, свет должен был бы иметь скорость $c + u$, где u — скорость бегущего человека, что противоречит второму постулату СТО, согласно которому эта скорость должна быть равна c .

Найдем преобразование координат и времени при которых скорость света не будет изменяться при переходе из одной ИСО в другую (для удобства эти ИСО будем называть K и K'). Поскольку в любой ИСО зависимость $x(t)$ для точки, которая движется с постоянной скоростью, линейна, то эти преобразования должны переводить прямые в прямые, т. е. быть линейными. В общем случае такие преобразования имеют вид:

$$\begin{cases} x' = Ax + Bt, \\ t' = Cx + Dt. \end{cases}$$

- 1.1. (0 баллов) Пользуясь тем, что зависимость координаты фотона от времени в двух разных ИСО K и K' записывается в виде $x = ct$ и $x' = ct'$, найдите явный вид преобразований, сохраняющих скорость света (они называются преобразованиями Лоренца):

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - vt), \\ t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right), \end{cases}$$

где $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ — релятивистский «гамма-фактор», а v — скорость движения K' относительно K .

Замечание 1. В этом примере мы рассматривали движение только вдоль оси x , поэтому координаты по осям y и z будут иметь вид: $y' = y$, $z' = z$.

Замечание 2. Видно, что в классическом (нерелятивистском) пределе, когда $v/c \ll 1$, преобразования Лоренца совпадают с преобразованиями Галилея.

Замечание 3. Из выражения для «гамма-фактора» следует, что система отсчета, движущаяся со скоростью больше скорости света, неприемлема в такой теории и не имеет физического смысла. Таким образом, можно заключить, что скорость света в вакууме — это не просто константа, а максимальная разрешенная скорость движения любых частиц.

Используя тот факт, что при обратном переходе из K' в K изменяется только знак у скорости v видно, что обратное преобразование Лоренца имеет вид:

$$\begin{cases} x = \gamma(x' + vt'), \\ t = \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right), \end{cases}$$

- 1.2. (0 баллов) Рубрика Хоббит туда и обратно. Убедитесь, что последовательно применяя два преобразования Лоренца для переходов $K \rightarrow K' \rightarrow K$ мы получаем тождественные преобразования координат и времени.

Рассмотрим движение одной и той же материальной точки вдоль оси абсцисс в двух ИСО K и K' . Записывая преобразование Лоренца для двух моментов времени и вычитая из одной системы уравнений другую мы получим:

$$\begin{cases} dx' = \gamma(dx - vdt), \\ dt' = \gamma\left(dt - \frac{v}{c^2}dx\right), \\ dy' = dy, \\ dz' = dz. \end{cases}$$

Пространство-время Минковского

Теперь, когда мы выяснили, что при преобразованиях Лоренца время, как и пространственные координаты, преобразуется нетождественно, имеет смысл объединить их в одно пространство-время Минковского, координаты точек которого имеют вид (ct, x, y, z) .

- 1.3. (0,4 балла) Нарисуйте и опишите, как при преобразованиях Лоренца при движении только вдоль оси x изменяются координатные оси ct и x .

В пространстве-времени Минковского каждая точка является *событием*, произошедшем на некоторой пространственной координате в некоторый момент времени. Расстояние между двумя событиями в пространстве-времени Минковского называется *интервалом* и вычисляется следующим образом:

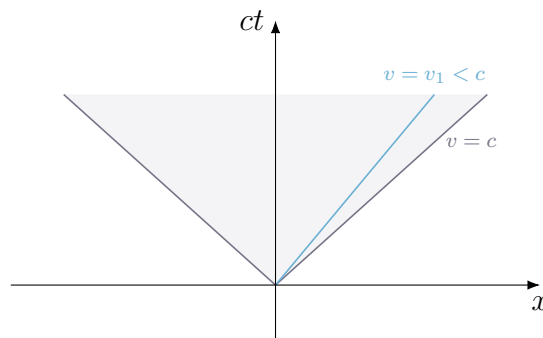
$$ds^2 = g_{tt}c^2dt^2 + g_{xx}dx^2 + g_{yy}dy^2 + g_{zz}dz^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2.$$

Набор коэффициентов g_{tt} , g_{xx} , g_{yy} , g_{zz} будем называть *метрикой*.

- 1.4. (0,4 балла) Покажите что преобразования Лоренца не изменяют интервал пространства-времени Минковского (говорят, что такие преобразования являются изометриями метрики).

Квадрат интервала между двумя событиями может быть любого знака. Рассмотрим события $(0,0)$ и (ct, x) и интервал ds между ними.

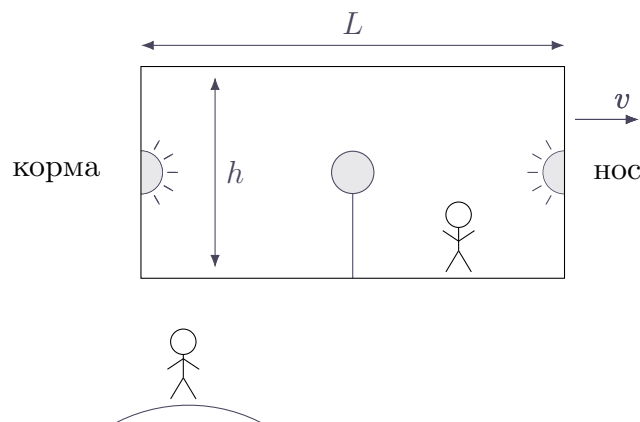
- События, для которых $ds^2 = 0$, лежат на световом конусе. Эти события соответствуют тому, что фотон, выпущенный из $(0,0)$, оказался в точке с пространственной координатой x в момент времени t . Такой интервал ds называется *светоподобным*.
- События, для которых $ds^2 < 0$, лежат снаружи светового конуса. Такой интервал называется *пространственноподобным*.
- События, для которых $ds^2 > 0$, лежат внутри светового конуса. Такой интервал называется *временноподобным*. Частицы в пространстве Минковского движутся по кривым, для которых для любого маленького участка $ds^2 > 0$. Такие кривые называются *мировыми линиями*.



Эффекты релятивистской кинематики

Рассмотрим несколько примеров, которые продемонстрируют нам особенности преобразований Лоренца.

- 1.5. (0,6 балла) Пусть ракета летит в космическом пространстве со скоростью $v = c/2$. Внутренний салон ракеты имеет форму прямоугольного параллелепипеда, в центрах «носа» и «кормы» которого установлены источники света. Происходят короткие вспышки этих источников одновременно по часам космонавта, находящегося в ракете. Найдите промежуток времени между детектированием вспышек приёмником, расположенным в центре салона в системе отсчёта наблюдателя, находящегося на неподвижной планете. В этой же системе отсчёта найдите промежуток времени между испусканиями вспышек источниками. Расстояние от «носа» до «кормы» в системе отсчёта ракеты равно L .



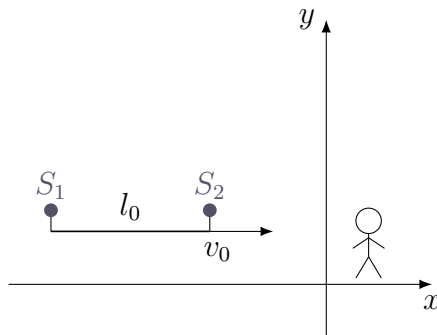
- 1.6. (0,6 балла) Изобразите события детектирования и испускания света в системах отсчёта космонавта и наблюдателя на планете в координатах пространства-времени Минковского.
- 1.7. (1 балл) Как для этих двух наблюдателей связаны времена, за которые свет, испускаемый из «кормового» источника, впервые достигнет «пола» ракеты, если расстояние от него до потолка равно h ?

Теперь рассмотрим один жизненный пример из мира физики частиц.

- 1.8. (0,6 балла) В атмосфере на высоте порядка 10 км над поверхностью Земли родился мезон. Его собственное время жизни (собственными для данного объекта называются величины, измеренные в связанной с ним системе отсчёта) составляет примерно 2,2 мкс. Оцените, к какой скоростью должен двигаться мезон для того, чтобы достичь детектора на поверхности Земли.

И ещё немного более абстрактных примеров.

- 1.9. (1 балл) Стержень имеет собственную длину l_0 . На концах стержня укреплены две лампочки S_1 и S_2 . Стержень движется со скоростью v_0 по направлению к неподвижному наблюдателю. Лампа S_1 испускает свет раньше, чем S_2 , так что обе вспышки достигают наблюдателя одновременно. В моменты испускания света лампы S_1 и S_2 находились в точках x_1 и x_2 соответственно. Какое расстояние $x_1 - x_2$ между лампочками измерит наблюдатель? (Это будет видимая длина стержня, как она воспринимается глазом человека или фиксируется фотоаппаратом.)



- 1.10. (0,8 балла) Из начала отсчета ИСО K вдоль оси x через промежуток времени T (по часам K) посылаются кратковременные световые импульсы. Найдите промежуток времени между моментами регистрации этих сигналов наблюдателем, если он находится в ИСО K' , движущейся навстречу системе K со скоростью $v = c/2$.

Парадокс близнецов

- 1.11. (0,8 балла) Космический корабль вылетает с Земли со скоростью βc в момент времени $t_0 < 0$ (по земным часам), где β — известная постоянная величина. На Земле остался брат-близнец капитана корабля. В момент времени $t_0/2$ по земным часам космический корабль производит быстрый разворот и возвращается на Землю со скоростью, равной начальной. Проанализируйте движение космонавта в системе отсчёта земного наблюдателя и покажите, что собственное время космонавта, прошедшее за время его путешествия, меньше, чем собственное время его брата (другими словами, близнец-космонавт постарел меньше).

Обратите внимание, что аналогичные рассуждения можно провести с точки зрения движущегося брата, который считает себя неподвижным, а земного наблюдателя — движущимся относительно него с той же скоростью. Тогда получится противоположная ситуация, что меньше постарел брат, находящийся на Земле. Объясните на качественном уровне, как разрешить такой парадокс, и чему на самом деле приблизительно равна разница собственных времён двух близнецов (укажите, кто из них будет старше на момент завершения путешествия).

Сложение скоростей

Рассмотрим преобразование скоростей в СТО.

- 1.12. (0 баллов) Пусть некоторое тело движется со скоростью v вдоль оси x в инерциальной системе отсчёта, связанной с неподвижным наблюдателем. Навстречу ему движется ракета с релятивистской скоростью u . Найдите скорость тела в системе отсчёта, связанной с ракетой.
- 1.13. (0 баллов) Как будет выглядеть ответ в случае движения ракеты в ту же сторону, что и наблюдаемое тело?
- 1.14. (0 баллов) Проверьте, что если скорость $v = c$, то скорость не изменяется.
- 1.15. (0,8 балла) Две линейки, собственная длина каждой из которых равна l_0 , движутся навстречу друг другу параллельно общей оси с релятивистскими скоростями. Наблюдатель, связанный с одной из них, зафиксировал, что между совпадениями левых и правых концов линеек прошло время T . Какова относительная скорость линеек?

2 Классическая черная дыра

В предыдущем разделе вы познакомились с постулатами Специальной Теории Относительности. Оказывается, что одним из прямых ее следствий является возможность существования особых объектов – черных дыр, обладающих свойством неизбежно «поглощать» любую, достаточно близко расположенную материю. В данном разделе вам предлагается провести собственное исследование подобного объекта.

При продолжительном наблюдении за положением звезды около центра галактики было выяснено, что она совершает периодическое движение в поле тяжести некоторого массивного объекта. Считайте известным, что расстояние от точки наблюдения до центра галактики равно $\approx 26 \cdot 10^3$ световых лет, период обращения звезды по ее траектории равен ≈ 16 лет, а плоскость, в которой происходит движение звезды, перпендикулярна направлению наблюдения.

- 2.1. (0,5 балла) Используя экспериментальные данные определите положение притягивающей звезду объекта в предложенных в задаче координатах.
- 2.2. (1 балл) Используя экспериментальные данные определите массу притягивающей звезду объекта.
- 2.3. (1,5 балла) Считая притягивающий звезду объект сферически симметричным, а его размер достаточно малым, определите границы области вокруг такого объекта из которой ни один сигнал не может достичь удалённого наблюдателя.

Таблица 1: Координаты наблюдения звезды

$x, '' \cdot 10^3$	–70	–60	–44	–27	–10	9	31	51	72	87	95
$y, '' \cdot 10^3$	133	150	166	177	182	185	182	174	159	139	118

Экспериментальные данные приведены в ортогональной системе координат, каждая из осей которой имеет размерность угловых секунд (") и является мерой угла отклонения точки от начала координат.

В работе разрешается использовать численные методы анализа экспериментальных данных, а определяемые из них параметры должны быть получены с точностью $5 \cdot 10^{-3} (")$.

Первый Хинт — 28.05.2025 20:00 (МСК)

Второй Хинт — 30.05.2025 12:00 (МСК)

Финал Пятого Эпизода — 01.06.2025 18:00 (МСК)

Разбор Пятого Эпизода — 01.06.2025 18:00 (МСК)