



# Кубок ЛФИ

9.s05.e04

## Hint 2

**ВАЖНО!** Задача является одновременно и хинтом, и альтернативой к основной задаче. Три важных момента:

1. Вы можете продолжать присылать решение основной задачи.
2. В любой момент до финального дедлайна вы можете перейти на решение *альтернативной задачи*. Если вы это делаете, то в самом начале решения напишите: *Я перехожу на решение альтернативной задачи!* В этом случае Штрафной коэффициент за альтернативную задачу будет равен

$$0,7 \cdot \sum_i \frac{k_i \cdot p_i}{10},$$

где  $p_i$  — балл за пункт, а  $k_i$  — штрафной коэффициент за соответствующий пункт на момент перехода на Альтернативную задачу. Другими словами, максимальный балл за альтернативную задачу равен максимальному баллу, который вы можете получить в момент перехода на нее, умноженному на 0,7. Заметим, что штрафной коэффициент не может быть меньше 0,1. Также напоминаем, что решения основной задачи с этого момента не проверяются. Будьте внимательными!

3. Задача состоит из нескольких пунктов. Штрафной множитель, заработанный **до этого** применяется ко всем пунктам. В дальнейшем каждый пункт оценивается как отдельная задача. Если вы присылаете решение без какого-либо пункта, то его решение считается Incorrecr. Более подробно о начислении баллов для составных задач смотрите в Правилах проведения Кубка. **С момента перехода на альтернативную подборку возможности вернуться к решению основной задачи нет.** Также, после перехода на альтернативную задачу **баллы за основную задачу обнуляются.**

# Введение

Время шло незаметно и когда стрелки часов пробежали немалую часть круга, Ёжик наконец-то размял затёкшие иголки и решил побродить по комнате обсерватории. Его внимание привлёк книжный шкаф, где он нашёл несколько интересных книг и заметки к ним. Он довольно зафыркал и стал их внимательно изучать.

## Теоретическая часть

### Классический метод размерностей

**Пример 1. Задача Галилея** Определите с точностью до постоянного множителя расстояние, проходимое за данный промежуток времени телом, свободно падающим из положения покоя.

#### Решение

**Шаг 1. Выявление определяющих параметров.** В этом примере расстояние  $s$  зависит от времени движения  $t$  и от ускорения свободного падения  $g$ . Также разумно предположить, что расстояние может зависеть от массы тела  $m$ .

**Шаг 2. Составление системы уравнений и ее решение.** Запишем уравнение в виде:

$$s = f(g, t, m),$$

где  $f(g, t, m)$  – это степенная функция своих переменных вида  $f = \text{Const} \cdot g^\alpha t^\beta m^\gamma$ . Тогда мы получаем уравнение на размерности:

$$L = L^\alpha T^{\beta-2\alpha} M^\gamma,$$

где  $L$ ,  $T$ ,  $M$  – единицы измерения длины, времени и массы соответственно, откуда получаем систему уравнений вида:

$$\begin{cases} 1 = \alpha \\ 0 = \beta - 2\alpha \\ 0 = \gamma. \end{cases}$$

Решая получившуюся систему уравнений, находим, что  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 2$ ,  $\gamma = 0$ . Откуда находим ответ:

$$s = \text{Const} \cdot gt^2.$$

Заметим, что мы также получили, что расстояние не зависит от массы тела.

При использовании метода размерностей также используют терминологию безразмерных параметров. В предыдущем примере можно было бы сказать, что у нас есть один безразмерный параметр  $\pi_1 = s/(gt^2)$ .

**Пример 2. Сила натяжения в кольце.** Найдите с точностью до множителя силу натяжения проволочного кольца, вращающегося в собственной плоскости вокруг оси, перпендикулярной плоскости вращения и проходящей через центр кольца.

#### Решение

### Шаг 1. Выявление определяющих параметров.

Нас интересует зависимость силы  $F$  от угловой скорости  $\omega$ . Поскольку задача напрямую связана с динамикой, то результат может зависеть от массы кольца  $m$ , а также от геометрии задачи, которая однозначно задается радиусом кольца  $R$ .

### Шаг 2. Составление системы уравнений и ее решение.

Используя метод размерностей мы получаем уравнение:

$$F = \text{Const} \cdot m^\alpha R^\beta \omega^\gamma.$$

Поскольку сила имеет размерность  $LMT^{-2}$ , мы получаем уравнение на степени:

$$LMT^{-2} = M^\alpha L^\beta T^\gamma.$$

Откуда получаем, что  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 1$ ,  $\gamma = -2$ , а сила определяется выражением:

$$F = \text{Const} \cdot mR\omega^2$$

Заметим, что в этой задаче можно сформировать только один безразмерный параметр  $\pi_1 = \frac{F}{mR\omega^2}$

**Пример 3. Ареометр Никольсона.** Найдите с точностью до множителя формулу для периода колебания цилиндра массы  $m$ , плавающего в жидкости, при небольшом смещении его вниз от положения равновесия.

### Решение

#### Шаг 1. Выявление определяющих параметров.

В данной задаче этот шаг делается не так однозначно как в предыдущих примерах. Ясно, что период  $t$  может зависеть от массы ареометра  $m$ , должен определяться силой Архимеда, которая зависит от плотности жидкости  $\rho$  и ускорения свободного падения  $g$ , а также должна зависеть от геометрии задачи, которая задается радиусом основания цилиндра или, что равносильно его площадью  $S$ .

Заметим, что от высоты цилиндра геометрия задачи не зависит, т.к. при ее изменении пропорционально изменяется и глубина погружения.

#### Шаг 2. Составление системы уравнений и ее решение.

Из предыдущего пункта получаем формулу:

$$t = \text{Const} \cdot m^\alpha s^\beta \rho^\gamma g^\delta,$$

что равносильно:

$$T = M^\alpha L^{2\beta} L^{-3\gamma} M^\gamma L^\delta T^{-2\delta}$$

Откуда получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 0 = 2\beta - 3\gamma + \delta \\ 0 = \alpha + \gamma \\ 1 = -2\delta. \end{cases}$$

Мы получили систему из трёх уравнений и четырёх неизвестных. Одна из переменных останется неизвестной и найти её можно из эксперимента (или применяя расширенный метод размерностей, что будет предложено вам сделать в Альтернативной задаче). Оставляя в качестве параметра, через который выражаются другие величины степень  $\alpha$  получаем, что  $\beta = -\frac{3\alpha}{2} + \frac{1}{4}$ ,  $\gamma = -\alpha$ ,  $\delta = -\frac{1}{2}$ . Т.е.

$$t = \text{Const} \cdot m^\alpha s^{-3\alpha/2+1/4} \rho^{-\alpha} g^{-1/2}.$$

В этом примере можно скомпоновать два безразмерных параметра  $gt^2/\sqrt{s}$  и  $ms^{3/2}/\rho$ .

## Расширенный метод размерностей

**Пример 4. Расширенный метод размерностей.** Пуля выпущена с начальной скоростью  $u$  в горизонтальном направлении на высоте  $h$  от земли. Определите дальность горизонтального полёта пули.

### Решение

Определяющими параметрами этой задачи являются дальность полёта по горизонтали  $L$ , начальная скорость пули  $u$ , ускорение свободного падения  $g$  и высота в момент выстрела  $h$ . Получаем формулу:

$$L = \text{Const} \cdot u^\alpha h^\beta g^\gamma,$$

откуда получаем формулу на размерности:

$$L_x = (L_x T^{-1})^\alpha L_z^\beta (L_z T^{-2})^\gamma.$$

Решая эту систему уравнений находим, что  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 1/2$ ,  $\gamma = -1/2$ , откуда находим, что дальность полёта равна:

$$L = \text{Const} \cdot v \sqrt{\frac{h}{g}}.$$

**Замечание.** Используя классический метод размерностей, останется одна неизвестная степень.

## Альтернативная задача

1. (1 балл) Используя метод размерностей найдите период колебаний математического маятника и покажите, что он не зависит от массы груза.
2. (2 балла) Пуля выпущена с начальной скоростью  $u$  под углом  $\alpha$  к горизонтальной плоскости. Используя расширенный метод размерностей, найдите дальность полёта с точностью до постоянного множителя.
3. (3 балла) Используя расширенный метод размерностей, найдите с точностью до постоянного множителя период колебаний ареометра Никольсона.
4. (4 балла) В таблице приведена вольт-амперная характеристика вакуумной лампы. В ней представлены показания анодного тока  $I$  от напряжения  $U$  (см таблицу). Считая, что  $I = \alpha U^\beta$ , определите  $\alpha$  и  $\beta$ .

№	$U$ , В	$I$ , мкА
1	0,5	3,24
2	1,0	12,7
3	1,5	24,62
4	2,0	38,05
5	2,5	55,54
6	3,0	73,2
7	4,0	116,82
8	5,0	158,14
9	12,0	188,82
10	15,0	911,9
11	20,0	1320,5
12	60,0	1634