

Кубок ЛФИ

09.s05.e02

— Ты спятил!
— И слава Богу, нормальный не пошёл бы на такое.
Пираты Карибского моря: На краю света

Parte Uno. El Cuadrado

Прислушавшись к совету Муравьишки-Путешественника, Ёжик решил отправиться в круиз с Кубы на Арубу. Джентльмены, которые взялись подвести Ёжика, принимали оплату только рабами: Ромой и Сережкой, ромом, ромовой бабой, сережками квадратными монетками. Ёжику удалось выкрутиться из ситуации, оплатить проезд, и на сдачу ему дали странную монетку в виде Квадратика со стороной l и массой m . На двух сторонах Квадратика отчеканены Кубок ЛФИ и Кубик ЛФИ.

Монетка показалась Ёжику фальшивой, да и джентльмены выглядели подозрительно, и он решил её выбросить в море. К удивлению Ёжика, через некоторое время монетка снова оказалась в его котомке. Это заинтересовало Ёжика, и он решил более подробно изучить Квадратик.

Первое на что обратил внимание Ёжик это то, что Квадратик тонкий и однородный. Далее он стал с ним проводить следующий эксперимент.

Ёжик бросает Квадратик с высоты H . Бросок производится следующим образом: Ёжик прикладывает короткий импульс силы к горизонтально расположенному Квадратику перпендикулярно его плоскости на случайном расстоянии $l \in [0, \frac{l}{2}]$ от его центра таким образом, что конечная скорость центра масс Квадратика равна v_0 и направлена вертикально вверх. Отрезок, соединяющий точку приложения силы и центр Квадратика, всегда параллелен одной из его сторон.

Ёжик решил поделиться нулевым Hint'ом. Если на Квадратик действует некоторая сила F в течение небольшого времени τ , то для твёрдого тела можно записать уравнения динамики:

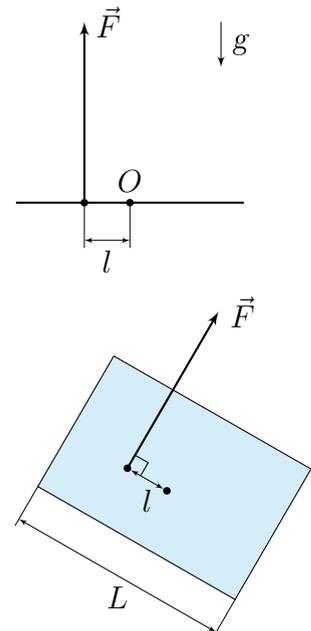
$$\begin{cases} F = ma_c, \\ M = I\varepsilon, \end{cases}$$

где F — сила, прикладываемая Ёжиком, a_c — ускорение центра масс, I — момент инерции относительно оси вращения, ε — угловое ускорение, M — момент силы F относительно оси вращения O , проходящей через центр масс. Так как $M = Fl$, то:

$$I\varepsilon = lma_c.$$

Поскольку $\varepsilon = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$ и $a_c = \frac{\Delta v}{\Delta t}$, то угловая скорость Квадратика:

$$\Delta\omega = \frac{ml\Delta v}{I} \Rightarrow \omega = \frac{mlv_0}{I}.$$



Последнее равенство мы получили путем суммирования малых приращений. Для **Квадратика** считайте момент инерции относительно оси вращения равным $I = \frac{1}{12}mL^2$.

Изначально сверху **Квадратика** отчеканен **Кубик**. Считайте, что при касании палубы **Квадратик** теряет всю свою линейную и угловую скорости.

Найдите вероятность, с которой выпадет **Кубок ЛФИ**, если все возможные значения $l \in [0, \frac{L}{2}]$ равновероятны, а параметры системы равны:

1. (2 балла) $L = 23,00$ мм, $m = 5,630$ г, $v_0 = 0,8800$ м/с, $H = 5,000$ см, $g = 10,00$ м/с²
2. (3 балла) $L = 23,00$ мм, $m = 5,630$ г, $v_0 = 4,500$ м/с, $H = 100,00$ см, $g = 10,00$ м/с²

Ответ дайте с точностью не менее 4 значащих цифр. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Parte Dos. El Cubo-pícaro

Когда ночью в кают-компании Ёжик играл с джентльменами в кости на Кюстю, один из кубиков показался ему подозрительным. Подгадав удачный момент, Ёжик незаметно реквизировал **Кубик**, чтобы подробнее его изучить. Чтобы никто его не заметил, Ёжик забрался в **воронье гнездо** и решил узнать распределение вероятностей¹ выпадения сторон **Кубика**.

Ёжик ставит **Кубик** на случайное ребро под случайным углом так, что все углы и ребра равновероятны, после чего отпускает **Кубик**, и тот падает на одну из граней. Считайте удар **Кубика** о дно вороньего гнезда абсолютно неупругим. Ёжик фиксирует результат в свой дневник.

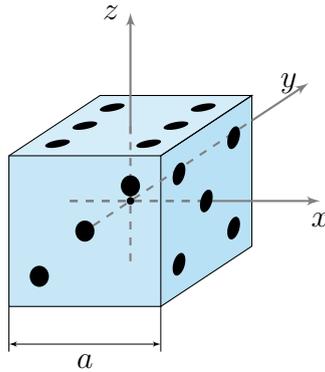
Светало. Ёжик поставил **Кубик** на рёбра достаточно **большое число раз**, пересчитал таблицу вероятностей и убедился, что подозрения были неспроста.

Оставшись довольным проделанной работой, Ёжик решил пойти отдыхать в свою каюту. Пока он спускался из вороньего гнезда на палубу, на него напала голодная до знаний чайка. Произошла **КРОВАВАЯ** битва за дневник с записями. У Ёжика лапки, поэтому всё, что ему удалось сохранить — это маленький клочок бумаги, на котором была только половина таблицы (см. **рисунок**)

P_1	P_2	P_3	P_4
$\frac{1}{6} + \frac{47}{300\pi}$	$\frac{1}{6} - \frac{31}{300\pi}$	$\frac{1}{6} - \frac{7}{50\pi}$	

¹В данном случае распределение вероятностей — это таблица, в которой указаны вероятности выпадения соответствующих граней.

1. (2 балла) Пусть центр масс слабо смещен на $\delta\vec{r} = (x, y, z)$ от центра Куба (см. рис). Выразите вероятности выпадения граней Кубика через смещение центра масс. Упростите полученные выражения, используя **приближенные формулы**. Учитывайте малые слагаемые по $\frac{x}{a}$, $\frac{y}{a}$, $\frac{z}{a}$ до первого порядка малости включительно.



2. (1 балл) Найдите суммы вероятностей для противоположных граней. Учитывайте малые слагаемые по $\frac{x}{a}$, $\frac{y}{a}$, $\frac{z}{a}$ до первого порядка малости включительно.
3. (2 балла) Помогите Ёжику восстановить вероятности выпадения каждой грани, используя данные, которые сохранились в таблице. Учитывайте малые слагаемые по $\frac{x}{a}$, $\frac{y}{a}$, $\frac{z}{a}$ до первого порядка малости включительно.

Примечание 1: сумма очков на противоположных гранях равна 7.

*Примечание 2: не волнуйтесь, море не волнуется. Поэтому **треской** тряской палубы можно пренебречь.*

Поскольку Ёжик был **Астрономом** и увлекался звездными картами, он знал несколько забавных и полезных фактов, которые могут вам пригодиться:

$$\frac{1}{1 + \xi} \approx 1 - \xi, \quad |\xi| \ll 1$$

$$\sqrt{1 + \xi} \approx 1 + \frac{\xi}{2}, \quad |\xi| \ll 1$$

$$\arcsin(\Xi_0 + \xi) \approx \arcsin(\Xi_0) + \frac{\xi}{\sqrt{1 - \Xi_0^2}}, \quad |\xi| \ll 1$$

$$\arccos(\Xi_0 + \xi) \approx \arccos(\Xi_0) - \frac{\xi}{\sqrt{1 - \Xi_0^2}}, \quad |\xi| \ll 1$$

$$\operatorname{arctg}(\Xi_0 + \xi) \approx \operatorname{arctg}(\Xi_0) + \frac{\xi}{\Xi_0^2 + 1}, \quad |\xi| \ll 1$$

$$\operatorname{arcctg}(\Xi_0 + \xi) \approx \operatorname{arcctg}(\Xi_0) - \frac{\xi}{\Xi_0^2 + 1}, \quad |\xi| \ll 1$$

$$\sin(\Xi_0 + \xi) \approx \sin(\Xi_0) + \xi \cos(\Xi_0), \quad |\xi| \ll 1$$

$$\cos(\Xi_0 + \xi) \approx \cos(\Xi_0) - \xi \sin(\Xi_0), \quad |\xi| \ll 1$$

Пример из заметок на полях:

$$\frac{1}{\Xi_0 + \xi + \zeta} = \frac{1}{\Xi_0} \cdot \frac{1}{1 + \xi/\Xi_0 + \zeta/\Xi_0} \approx \frac{1}{\Xi_0} \left(1 - \underbrace{(\xi/\Xi_0 + \zeta/\Xi_0)}_{\text{Первый порядок}} + \underbrace{\left((\xi/\Xi_0)^2 + 2\frac{\xi\zeta}{\Xi_0^2} + (\zeta/\Xi_0)^2 \right)}_{\text{Второй порядок}} \right)$$

Настоятельно ~~настаиваем~~ рекомендуем использовать математические ~~котомжи~~ пакеты.

Первая подсказка — 06.05.2024 20:00 (МСК)

Вторая подсказка — 08.05.2024 12:00 (МСК)

Окончание второго тура — 10.05.2024 20:00 (МСК)

Разбор второго тура — 10.05.2024 20:00 (МСК)