

Кубок  ЛФИ 2023

9.s04.e03

Hint 2

ВАЖНО! Задача является одновременно и хинтом, и альтернативой к основной задаче. Три важных момента:

1. Вы можете продолжать присылать решение основной задачи.
2. В любой момент до финального дедлайна вы можете перейти на решение *альтернативной задачи*. Если вы это делаете, то в самом начале решения напишите: *Я перехожу на решение альтернативной задачи!* В этом случае Штрафной коэффициент за альтернативную задачу будет равен

$$0,7 \cdot \sum_i \frac{k_i \cdot p_i}{10},$$

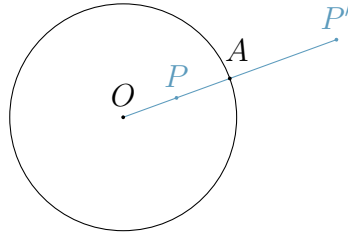
где p_i — балл за пункт, а k_i — штрафной коэффициент за соответствующий пункт на момент перехода на Альтернативную задачу. Другими словами, максимальный балл за альтернативную задачу равен максимальному баллу, который вы можете получить в момент перехода на нее, умноженному на 0,7. Заметим, что штрафной коэффициент не может быть меньше 0,1. Также напоминаем, что решения основной задачи с этого момента не проверяются. Будьте внимательными!

3. Задача состоит из нескольких пунктов. Штрафной множитель, заработанный **до этого** применяется ко всем пунктам. В дальнейшем каждый пункт оценивается как отдельная задача. Если вы присылаете решение без какого-либо пункта, то его решение считается Incorrec. Более подробно о начислении баллов для составных задач смотрите в Правилах проведения Кубка. **С момента перехода на альтернативную подборку возможности вернуться к решению основной задачи нет.** Также, после перехода на альтернативную задачу **баллы за основную задачу обнуляются.**

Альтернативная задача

Задача 1. (*0 баллов*) Инверсия — это преобразование евклидовой плоскости. Пусть заданы точка O (ее будем называть полюсом инверсии) и некоторое расстояние R (его назовём радиусом инверсии). Тогда инверсия, заданная параметрами выше, переводит некоторую точку P (не совпадающую с O) в точку P' таким образом, что P' лежит на прямой OP и $OP \cdot OP' = R^2$.

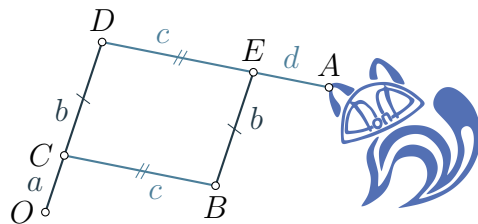
1. (0 баллов) Докажите, что при инверсии окружность с центром в точке P ($PO = a \neq 0$) и радиусом r переходит в окружность.
2. (0 баллов) Найдите радиус и положение центра полученной окружности.



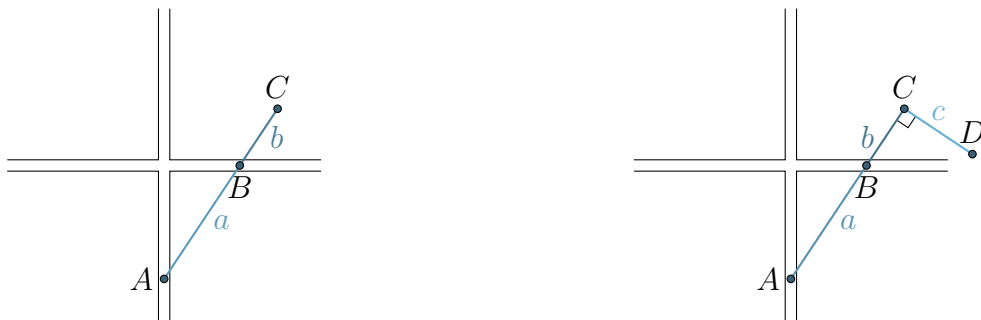
Задача 2. (2 балла) Как и в месте работы любого творца или просто увлекающегося изобретателя в мастерской Ганса существовало то, что обычный прохожий назвал бы беспорядком. Разумеется, Ганс смог бы переспорить любого, кто сказал бы ему это лично, но в какой-то момент идея об уборке поселилась и в его голове. Первой удар на себя приняла кладовка, из которой Ганс с тёплым чувством ностальгии извлёк одни из своих первых профессиональных инструментов - пантограф и эллипсограф.

Пантограф представляет собой конструкцию из шарнирно закреплённых нерастяжимых стержней OD, DA, BE, BC (см. рис.). Точка O — всегда неподвижна. Известно, что $OC = a$, $CD = BE = b$, $BC = ED = c$, $AE = d$, причём выполняется соотношение: $b/a = d/c = \gamma$. Все четыре стержня могут вращаться друг относительно друга в местах шарнирных соединений — E, B, C, D . Известно, что точка A нарисовала котика.

1. (1 балл) Докажите, что точка B тоже нарисует котика.
2. (1 балл) Во сколько раз длина хвоста котика, нарисованного точкой B , будет отличаться от длины хвоста нарисованного точкой A ?



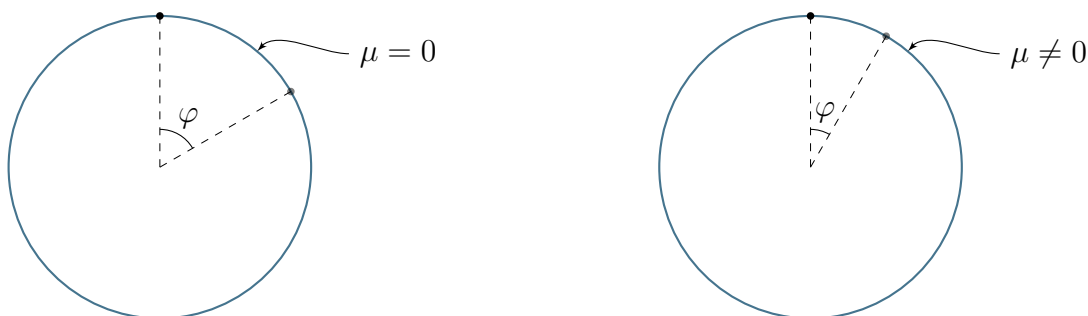
Задача 3. (2 балла) Эллипсограф представляет собой механизм, состоящий из двух ползунов — A и B , скреплённых жёсткими стержневыми конструкциями. Ползуны могут двигаться по двум бесконечным перпендикулярным направляющим. Известно, что $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$. Найдите траекторию точки C в первом случае и точки D во втором (см. рис.), если известно, что стержневые конструкции совершили по одному полному обороту и известно, что $AC \perp CD$.



Задача 4. (0 баллов) Копаясь в своих старых разработках, Ганс обнаружил странную конструкцию, причину создания которой он давно забыл. Она состояла из большого вертикально расположенного обруча радиуса R и надетого на него маленького кольца. Найдите все положения равновесия кольца на обруче и исследуйте их на устойчивость, если:

1. (0 баллов) Обруч гладкий.
2. (0 баллов) Коэффициент трения кольца об обруч известен и равен μ .

Положение равновесия удобно задавать через угол из центра обруча между направлениями на кольцо и верхнюю точку обруча (см. рис).

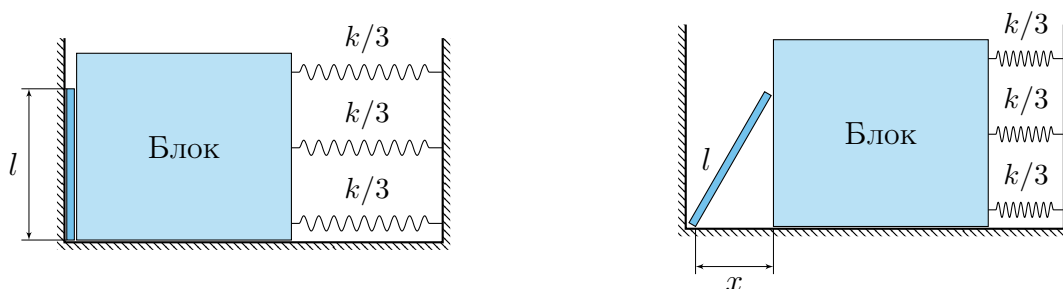


Задача 5. (4 балла) Попытки вспомнить о предназначении конструкции пришлось прервать, поскольку Гансу поступил заказ на изготовление нестандартного органайзера для виниловых пластинок. Нестандартный он был потому, что содержал механизм, который должен был удерживать горизонтальную стопку пластинок от падения, прижимая ее к одной из стенок органайзера.

И вот, спустя несколько часов заказ был собран. Он представлял собой невесомый куб на трёх невесомых пружинах жёсткости $k/3$, присоединённых к правой стенке органайзера так, что они были недеформированны, когда куб находился у противоположной стенки (см. рис). Длина недеформированных пружин была l_0 , а абсолютно все поверхности составных частей органайзера были гладкими.

Для тестирования механизма Ганс положил в изделие одну пластинку из своей коллекции и заметил, что она может находиться в равновесии, когда кубик находится на расстоянии x от левой стенки органайзера (см. рис.). Пластинка Ганса находится в плоской гладкой квадратной упаковке со стороной l , и ее центр масс совпадает с геометрическим центром упаковки. Масса пластинки вместе с упаковкой равна m .

1. (2 балла) При каких x пластинка будет находиться в положении равновесия?
2. (2 балла) Являются ли эти положения равновесия устойчивыми?

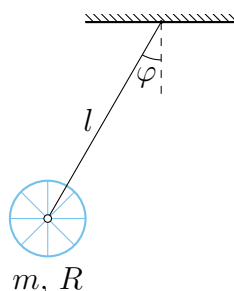


Задача 6. (2 балла) Разобравшись с органайзером для пластинок, Ганс решил вернуться

к найденной ранее конструкции из обруча и кольца. С досадой осознавая, что у него нет ни единого шанса вспомнить хоть что-то о предназначении изделия, Ганс снял кольцо с обруча. Затем он прикрепил к обручу некоторое количество невесомых спиц так, что они симметрично расходились от центра обруча к его поверхности. Полученное «колесо» Ганс подвесил за центр к потолку на невесомой нити длины l , отклонил от вертикали на малый угол и отпустил без начальной скорости (см. рис). Радиус обруча R , масса m , плоскость обруча во время движения расположена вертикально. В какой-то момент угол между нитью и вертикалью стал равен φ , а скорость изменения этого угла была равна $\dot{\varphi}$.

1. (0 баллов) Запишите выражение для полной энергии системы в этот момент времени.
2. (0 баллов) Получите из этого выражения через дифференцирование тангенциальное ускорение центра обруча.

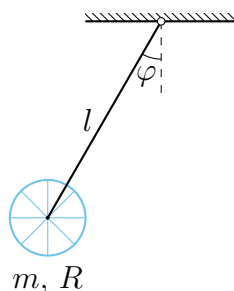
Выразите ответы через $l, R, m, g, \varphi, \dot{\varphi}$.



Если бы кто-то наблюдал за тем, как пристально и воодушевлённо Ганс следил за движением подвешенного обруча, то он бы точно понял, что останавливаться изобретатель не собирается. Быстро найдя в мастерской все необходимое, Ганс заменил нить на твёрдый невесомый стержень, который одним концом жёстко крепился к центру «колеса», а другим - шарнирно к потолку. Радиус обруча R , масса m , плоскость обруча во время движения расположена вертикально. В какой-то момент угол между стержнем и вертикалью стал равен φ , а скорость изменения этого угла была равна $\dot{\varphi}$.

3. (0 баллов) Запишите выражение для полной энергии системы в этот момент времени.
4. (0 баллов) Получите из этого выражения через дифференцирование тангенциальное ускорение центра обруча.

Выразите ответы через $l, R, m, g, \varphi, \dot{\varphi}$.



Наблюдая за изменённым «колёсным маятником», Ганс несколько удивился, затем нахмурился и начал беспокойно расхаживать по мастерской, иногда останавливаясь, чтобы не врезаться в двигающуюся конструкцию. В какой-то момент он сел за стол и начал что-то очень спешно записывать. Ганс планировал собрать последнюю версию маятника, которая дала бы ему ответы на все интересующие вопросы. Новый маятник должен был

состоять из двух одинаковых обручей с невесомыми спицами. Центры обручей должны были быть жёстко соединены друг с другом невесомым стержнем длиной l и подвешены на двух одинаковых невесомых нитях длиной l к одной точке на потолке (см. рис.). Радиусы обручей R , массы m , во время движения обручи находятся в одной вертикальной плоскости. Пусть в какой-то момент угол между серединным перпендикуляром к стержню и вертикалью стал равен φ , а скорость изменения этого угла была равна $\dot{\varphi}$.

5. (1 балл) Запишите выражение для полной энергии системы в этот момент времени.
6. (1 балл) Получите из этого выражения через дифференцирование тангенциальное ускорение центра обруча.

Выразите ответы через $l, R, m, g, \varphi, \dot{\varphi}$.

