10.s05.e02

Hint 2

ВАЖНО! Задача является одновременно и хинтом, и альтернативой к основной задаче. Три важных момента:

1. Вы можете продолжать присылать решение основной задачи.
2. В любой момент до финального дедлайна вы можете перейти на решение *альтернативной задачи*. Если вы это делаете, то в самом начале решения напишите: *Я перехожу на решение альтернативной задачи!* В этом случае Штрафной коэффициент за альтернативную задачу будет равен

$$0{,}7 \cdot \sum_i \frac{k_i \cdot p_i}{10},$$

где p_i — балл за пункт, а k_i — штрафной коэффициент за соответствующий пункт на момент перехода на Альтернативную задачу. Другими словами, максимальный балл за альтернативную задачу равен максимальному баллу, который вы можете получить в момент перехода на нее, умноженному на 0,7. Заметим, что штрафной коэффициент не может быть меньше 0,1. Также напоминаем, что решения основной задачи с этого момента не проверяются. Будьте внимательными!

3. Задача состоит из нескольких пунктов. Штрафной множитель, заработанный **до этого** применяется ко всем пунктам. В дальнейшем каждый пункт оценивается как отдельная задача. Если вы присылаете решение без какого-либо пункта, то его решение считается Incorrect. Более подробно о начислении баллов для составных задач смотрите в Правилах проведения Кубка. **С момента перехода на альтернативную подборку возможности вернуться к решению основной задачи нет.** Также, после перехода на альтернативную задачу **баллы за основную задачу обнуляются**.

Альтернативная задача

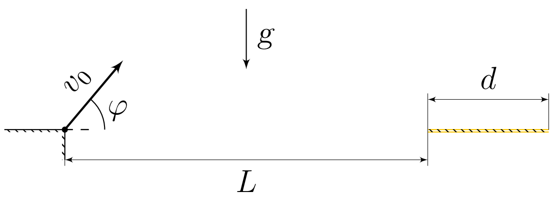
Часть 1. Догони меня Добрый Кирпич

Ёжик играет с чайками в следующую игру: чайки летают на высоте H, а Ёжик бросает Добрый Кирпич массой m вертикально вверх с начальной случайной скоростью v_0. Поскольку чаек летает много, то если в какой-то момент кирпич оказывается на высоте H, то Ёжик выигрывает, а одна из чаек проигрывает. Найдите вероятность выигрыша Ёжика, если:

1. *(1 балл)* $m = 5{,}2$ кг, $v_0 \in [10,\ 15]$ м/с, $H = 10$ м, $g = 10$ м/с^2.
2. *(1 балл)* $m = 5{,}2$ кг, $v_0 \in [15,\ 20]$ м/с, $H = 10$ м, $g = 10$ м/с^2.

Все скорости равновероятны.

Часть 2. ~~Избунка~~ Из пушки по чайкам

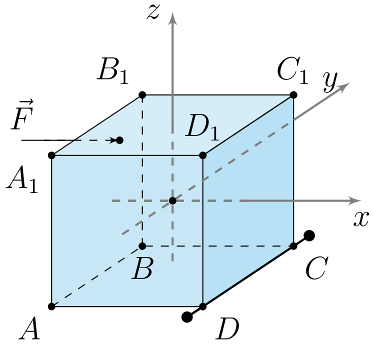


Спустя некоторое количество склянок, чайкам надоела предыдущая игра и они предложили изменить правила. Ёжик берёт у джентельменов корабельную пушку, чайка располагается на уровне пушки на расстоянии L от неё. Ёжик запускает ядро массы m со скоростью v_0 под некоторым углом к горизонту. К сожалению, у Ёжика лапки, поэтому угол к горизонту лежит в диапазоне $(0, 13\pi)$. Все углы равновероятны. Если ядро попадает в чайку, она проигрывает, а Ёжик выигрывает. Считая горизонтальный размер чайки равным d, найдите вероятность, с которой ~~Ёжик и джентельмены будут кормить рыб~~ Ёжик одержит победу, если:

1. *(1.5 балла)* $m = 12$ кг, $v_0 = 20$ м/с, $d = 1{,}0$ м, $L = 30{,}0$ м, $g = 10{,}0$ м/с^2.
2. *(1.5 балла)* $m = 12$ кг, $v_0 = 20$ м/с, $d = 1{,}0$ м, $L = 39{,}5$ м, $g = 10{,}0$ м/с^2.

Считайте ядро точечным.

Часть 3. Люк в трюм



Ёжик прогуливался по кораблю и обнаружил очень странный люк в трюм. Люк представляет из себя куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, причем сторона DC шарнирно закреплена таким образом, что люк может свободно проворачиваться вокруг неё (см. рис.). Длина стороны люка равна $2a$, масса люка m. Начало координат находится в геометрическом центре люка. Центр масс люка имеет известные координаты $(x,\ y,\ z)$, $|x| < a$, $|y| < a$, $|z| < a$. Ёжик прикладывает силу $F = mg$ к случайной точки случайной грани кубика перпендикулярно этой грани.

1. *(2 балла)* Найдите вероятность, что люк сдвинется с места.

Трюм находится под гранью $ABCD$, считайте что люк не может открыться внутрь трюма.

Часть 4. Метод рядов

Ёжику, как астроному, известно, что энергия гравитационного взаимодействия шарообразной планеты и точечной массы m, находящейся вне планеты, равна:

$$\mathfrak{E} = -\frac{GmM}{r}$$

1. *(0,5 балла)* Используя приближенные формулы получите выражение для потенциальной энергии тела на расстоянии $R+h$ от центра планеты, где R — радиус планеты, а h — небольшая высота ($h \ll R$), на которую подняли тело.

Кроме того, Ёжику известно, что в релятивистской механике кинетическая энергия тела равняется:

$$E_K = \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2} - mc^2,$$

где m — масса, p — импульс, c — скорость ~~Светы~~ света.

2. *(0,5 балла)* Считая, что скорость тела много меньше скорости света, получите выражение для классической кинетической энергии.

Часть 5. ~~Чайка сыграла в ящик~~ Ящик на палубе

Ящик находится на горизонтальной и шероховатой палубе. Масса ящика ~~вместе с чайкой~~ равна m. Коэффициент трения между ящиком и палубой равен μ. В центр ящика Ёжик прикладывает силу F, направленную под таким углом α к горизонту, что $\alpha = \arctan(\mu) + \delta$, где $|\delta| \ll 1$. Сила F является минимальной для данного угла силой, которую необходимо приложить, чтобы сдвинуть ящик с места.

1. *(2 балла)* Выразите F через μ, m, g, δ до первого ненулевого порядка по δ, используя приближенные формулы.

Ящик имеет форму прямоугольного параллелепипеда. Вертикальная проекция силы F направлена против ускорения свободного падения g.

Поскольку Ёжик был Астрономом и увлекался звёздными картами, он знал несколько забавных и полезных фактов, которые могут вам пригодиться:

$$\frac{1}{1+\xi} \approx 1 - \xi + \xi^2 - \xi^3,\ |\xi| \ll 1$$

$$\sqrt{1+\xi} \approx 1 + \frac{\xi}{2} - \frac{\xi^2}{8} + \frac{\xi^3}{16},\ |\xi| \ll 1$$

$$\arcsin\left(\Xi_0 + \xi\right) \approx \arcsin\left(\Xi_0\right) + \frac{\xi}{\sqrt{1-\Xi_0^2}} + \frac{\xi^2 \Xi_0}{2\left(1-\Xi_0^2\right)^{3/2}} + \frac{\xi^3\left(2\Xi_0^2+1\right)}{6\left(1-\Xi_0^2\right)^{5/2}},\ |\xi| \ll 1$$

$$\arccos\left(\Xi_0 + \xi\right) \approx \arccos\left(\Xi_0\right) - \frac{\xi}{\sqrt{1-\Xi_0^2}} - \frac{\xi^2 \Xi_0}{2\left(1-\Xi_0^2\right)^{3/2}} - \frac{\xi^3\left(2\Xi_0^2+1\right)}{6\left(1-\Xi_0^2\right)^{5/2}},\ |\xi| \ll 1$$

$$\operatorname{arctg}\left(\Xi_0 + \xi\right) \approx \operatorname{arctg}\left(\Xi_0\right) + \frac{\xi}{\Xi_0^2+1} - \frac{\xi^2 \Xi_0}{\left(\Xi_0^2+1\right)^{2}} + \frac{\xi^3\left(3\Xi_0^2-1\right)}{3\left(\Xi_0^2+1\right)^{3}},\ |\xi| \ll 1$$

$$\operatorname{arcctg}\left(\Xi_0 + \xi\right) \approx \operatorname{arcctg}\left(\Xi_0\right) - \frac{\xi}{\Xi_0^2+1} + \frac{\xi^2 \Xi_0}{\left(\Xi_0^2+1\right)^{2}} + \frac{\xi^3\left(1-3\Xi_0^2\right)}{3\left(\Xi_0^2+1\right)^{3}},\ |\xi| \ll 1$$

$$\sin\left(\Xi_0 + \xi\right) \approx \sin\left(\Xi_0\right) + \xi\cos\left(\Xi_0\right) - \frac{1}{2}\xi^2\sin\left(\Xi_0\right) - \frac{1}{6}\xi^3\cos\left(\Xi_0\right),\ |\xi| \ll 1$$

$$\cos\left(\Xi_0 + \xi\right) \approx \cos\left(\Xi_0\right) - \xi\sin\left(\Xi_0\right) - \frac{1}{2}\xi^2\cos\left(\Xi_0\right) + \frac{1}{6}\xi^3\sin\left(\Xi_0\right),\ |\xi| \ll 1$$

$$(1+\xi)^n \approx 1 + n\xi + \frac{1}{2}n(n-1)\xi^2 + \frac{1}{6}n(n-1)(n-2)\xi^3,\ |\xi| \ll 1$$

P.S.

При съемках этого Эпизода ни Ёжик, ни чайки не пострадали.