Приготовьтесь к осложнениям.
Доктор Хаус.

Хаос и дискретные модели

В данной задаче вам придется применять как навыки аналитических вычислений, так и навыки численного моделирования. Но это не так страшно, как может показаться на первый взгляд.

Среда программирования для задачи

Для того, чтобы вам не пришлось ничего программировать, мы подготовили тетрадку в среде Google Colab. Можно использовать без смс, но с регистрацией.

Проходите по ссылке на тетрадку (на всякий случай, вот она еще раз), заходите в свой гуглаккаунт, нажимаете на выполнение кода в любой ячейки (это такая кнопка плей), вам сообщают радостную новость о том, что данный код написал некий Елисеев Максим, вы соглашаетесь с этим и тетрадка готова к использованию.

Подробно про то, как пользоваться тетрадкой рассказано в данном видео (тем самым Максимом Елисеевым). ~~Если~~ Когда у вас ~~останутся~~ появятся вопросы о том, как пользоваться данной тетрадью, то вы можете их задать в личные сообщения вот этому человеку. Не стесняйтесь, он готов и заряжен отвечать 25 (двадцать пять) на 7.

Замечание. Большая часть тетради это обучение, которое пропускать не надо, и задание 10-11 классов, которое вы можете пропустить (в крайнем случае нет). Основная работа будет в разделе «Дискретная модель» и «Путь Точки».

Замечание. Вы можете использовать любую другую среду для решения данной задачи, но мы не гарантируем, что другие численные методы сойдутся к правильному решению. И есть риск, что мы не сможем вам с этим никак помочь. На случай проблем с Google Colab исходные ipynb файлы можно скачать в этой папке.

Дискретные модели

Во многих задачах бывает удобно переходить к дискретному времени и наблюдать за динамикой изменения некоторой величины. Например, мы можем обозначить x_n популяцию некоторого биологического вида в момент времени t_n (к примеру, в год с номером n). Тогда уравнение, описывающее динамику изменения популяции в самом простом случае, может иметь вид

$$x_{n+1} = \lambda x_n,$$

где $\lambda = \text{const} > 0$ — коэффициент, который определяет условия жизни данного вида. Ясно, что если $\lambda > 1$, то популяция будет неограниченно расти, если $\lambda = 1$, то ее значение будет из года в год постоянным, если $\lambda < 1$, то популяция вымрет. В этой части задачи мы будем анализировать схожие модели.

Правую часть уравнения мы будем обозначать $f(x_n)$. Если некоторое значение x^* удовлетворяет условию $f(x^*) = x^*$, то такой x^* мы будем называть положением равновесия.

Если мы два раза подействуем нашей «функцией», т. е. запишем выражение вида $f(f(x))$, то такое преобразование мы будем называть квадратичным и будем обозначать как $f^2(x)$. При действии нашей функцией n раз мы будем использовать обозначение $f^n(x)$. Ясно, что степень в данном случае не равносильна понятию степени из алгебры.

Путь точки. Линейный случай.

Рассмотрите в тетради клетку «Путь Точки». В ней задана «функция»

$$f(x) = \lambda \cdot \min\left[(1-x), x\right], \quad x_{n+1} = f(x_n)$$

где $\lambda = \mathrm{const} > 0$. Во всех пунктах этой части задачи мы будем рассматривать только значения $x \in [0, 1]$.

1. *(0,5 балла)* В каких пределах может изменяться параметр λ, чтобы x_n при любом n принадлежал отрезку от $[0, 1]$?

2. *(0 баллов)* Изобразите $f(x)$.

3. *(0,5 балла)* Качественно изобразите $f^2(x)$ и $f^4(x)$ при значениях параметра $\lambda \neq 0$.

4. *(0,5 балла)* Найдите зависимость числа положений равновесия от параметра λ у системы, задаваемой «функцией» $f(x)$. Для тех значений λ, где число положений равновесия наибольшее, найдите зависимость положений равновесия $x^*(\lambda)$.

5. *(0,3 балла)* Найдите зависимость числа положений равновесия от параметра λ у системы, задаваемой «функцией» $f^2(x)$. Для любого параметра λ, где число положений равновесия максимально, разработайте графический метод отыскания этих положений равновесия.

6. *(0,7 баллов)* Чему равно максимальное конечное число положений равновесия у системы, задаваемой «функцией» $f^n(x)$?

7. *(1,3 балла)* Для «функции» $f(x)$ и $\lambda = 1.5$ получите последовательность x_n, если $x_0 = 0{,}6$, $x_0 = 0{,}4$ и $x_0 = 0{,}139$. Результат представьте в виде графика, на котором будут изображены $f(x)$, а также $g(x) = x$ или в виде первых сорока значений последовательности $x(n)$. Объясните полученный результат.

8. *(1,7 баллов)* Для «функции» $f^2(x)$ и $\lambda = 1.5$ получите последовательность x_n, если $x_0 = 0{,}6$, $x_0 = 0{,}61$. Результат представьте в виде графика, на котором будут изображены $f(x)$, а также $g(x) = x$ или в виде первых сорока значений последовательности $x(n)$. Объясните результат.

   Попробуйте найти (или изобразить) зависимости для других начальных значений.

9. *(1 балл)* Откройте клетку тетради в разделе «Дискретная модель. Линейный случай». Она умеет строить зависимость значений точек, отвечающих положениям равновесия для функции $f^n(x)$ от параметра λ. Постройте данный график. Какие особенности данного графика вы можете выделить? Перечислите все свойства, которые сможете найти.

Путь Точки. Квадратичный случай.

Модифицируя код в клетке «Путь Точки», проанализируйте следующую «функцию»

$$f(x) = \lambda x(1-x),$$

где $\lambda = \mathrm{const} > 0$.

Примечание. Эта «функция» встречается в самых разных разделах науки. От диффузии до экономики.

Во всех пунктах этой части задачи мы будем рассматривать только значения $x \in [0, 1]$.

10. *(0,5 балла)* В каких пределах может изменяться параметр λ, чтобы x_n при любом n принадлежал отрезку от $[0, 1]$?
11. *(0,5 балла)* Изобразите $f(x)$. Найдите, при каких λ число положений равновесий наибольшее. Как зависят данные положения равновесия от λ
12. *(0,5 балла)* Изобразите $f^2(x)$ при любом значении параметра $\lambda \neq 0$.
13. *(0,5 балла)* Для «функции» $f(x)$ и $\lambda = 2$ и получите последовательность x_n, если $x_0 = 0{,}5$, $x_0 = 0{,}4$ и $x_0 = 0{,}33$. Результат представьте в виде графика, на котором будут изображены $f(x)$, а также $g(x) = x$ или в виде первых сорока значений последовательности $x(n)$. Объясните полученный результат.
14. *(0,5 балла)* Для «функции» $f^2(x)$ и $\lambda = 2$ получите последовательность x_n, если $x_0 = 0{,}1$, $x_0 = 0{,}16$. Результат представьте в виде графика, на котором будут изображены $f(x)$, а также $g(x) = x$ или в виде первых сорока значений последовательности $x(n)$. Объясните результат.

    Попробуйте найти (или изобразить) зависимости для других начальных значений x.
15. *(1 балл)* Откройте клетку тетради в разделе «Дискретная модель. Квадратичный случай». Она умеет строить зависимость значений точек, отвечающих положениям равновесия для функции $f(x)$ от параметра λ. Задайте максимальное значение λ и постройте данный график. Какие особенности данного графика вы можете выделить? Перечислите все свойства, которые сможете найти.

Первая подсказка — 16.05.2022 14:00 (МСК)
Вторая подсказка — 18.05.2022 14:00 (МСК)

Окончание пятого тура — 20.05.2022 22:00 (МСК)