



Кубок 7 ЛФИ

11.s07.e05

«Помни, что ни одно честно проведённое исследование не бывает напрасным, даже если в тот момент кажется иначе. Убери его в ящик стола — и через десять, двадцать или тридцать лет оно вернётся и поможет тебе так, как ты никогда не мог предвидеть».
Энтони Джеймс Легgett

Содержание

СверхЭпизод	2
Условие основной задачи	3
Старая квантовая механика	3
Постоянная Планка	3
Характерные величины в атомной физике	3
Фазовое пространство и фазовые траектории	4
Правило квантования Бора–Зоммерфельда	4
Прямоугольная потенциальная яма	5
Квантование момента импульса	5
Микроскопическая теория сверхпроводимости	6
Понятие магнитного момента	8
Теория фазовых переходов Ландау	9
Параметр порядка	9
Функционал Ландау	12
Магнитные свойства сверхпроводников	14
Двухжидкостная модель	15
Вихри Абрикосова	17
Квантование магнитного потока	18
Первое критическое магнитное поле B_{c1}	18
Второе критическое магнитное поле B_{c2}	19
Метод изображений в сверхпроводниках	19
Эффект Мейснера в сверхпроводниках I рода	19
Виток с током над жестким сверхпроводником II рода	20

СверхЭпизод

В двух словах так и не скажешь почему Си-Люс-Люс и Пайтон, Валли и Хэл, Ёжик и Су-рок, Ам Ням и Ом Ном, а также инженер Мстислав Лось оказались вместе. Но некоторые Эпизоды таковы, что чтобы с ними справиться, нужна поддержка всех и каждого.

В данной задаче мы хотим с вами поговорить о таком важном разделе современной физики как сверхпроводимость — явлении, суть которого состоит в том, что при конечной температуре, называемой критической, проводник переходит из своего обычного состояния с конечным значением удельного сопротивления в состояние, в котором его удельное сопротивление стремится к нулю с очень высокой степенью точности (вплоть до 10^{-9} Ом · м). Данное явление интересно как с фундаментальной точки зрения, так и с практической. С фундаментальной точки зрения нам интересно понять, как такое состояние образуется, какие возможны способы его описания и какие предсказания на основании данных теоретических рассуждений мы можем сделать. С практической точки зрения данное явление интересно уже потому, что факт отсутствия сопротивления означает возможность создания электрических устройств, где будут нулевые потери на джоулево тепло. Помимо этого сверхпроводники интересны с точки зрения множества других приложений, связанных с созданием сильных магнитных полей, детектированием чрезвычайно слабых полей, квантовыми логическими операциями и т.д.

При обсуждении данного явления нам надо будет сначала познакомиться с некоторыми несложными подходами, которые используются в квантовой механике, после чего мы сможем перейти к обсуждению явления сверхпроводимости и его свойств. В частности мы поговорим о микроскопической теории, которая описывает данное явление, теории фазовых переходов Ландау, двухжидкостной модели, а также о сверхпроводниках I и II рода и их магнитных свойствах (уравнение Лондонов, вихри Абрикосова, эффект Мейснера и так далее).

В условии задачи вам будут встречаться пункты, в которых будут указаны в скобках баллы, которые можно за них заработать, а также пункты, помеченные как **упражнение**, которые добавлены в условие для того, чтобы вы смогли поработать с новыми понятиями и терминами. Упражнения не являются обязательными для выполнения и отправки, а кроме того, поскольку проверка обещает быть непростой, данные пункты оцениваться Жюри не будут. Другими словами, их можно решать методом скипа и не присылать в своих решениях.

Присаживайтесь, разговор здесь не на пять минут.

Старая квантовая механика

Одной из ключевых вех становления квантовой механики является теория, которая в последствии получила название «Старая квантовая механика» и развивалась с 1900 по 1924 годы. Ключевыми фигурами в разработке этих подходов являлись ученые Нильс Бор и Арнольд Зоммерфельд.

В этом разделе мы вас познакомим с элементами этой теории. В начале задачи мы расскажем вам про постоянную Планка, после чего перейдем к оценке характерных масштабов явлений, узнаем, что такое фазовое пространство и фазовая траектория, а в конце задания поговорим о правиле квантования Бора-Зоммерфельда.

Постоянная Планка

Началом отсчета для истории квантовой механики можно считать работу Макса Планка про излучение абсолютно черного тела (1900 год), где предлагалось объяснение одной из проблем физики начала XX века — ультрафиолетовой катастрофы¹. Однако в ходе своих рассуждений Планку пришлось прибегнуть к гипотезе квантования энергии при излучении и поглощении электромагнитных волн. Другими словами ему пришлось предположить, что энергия излучается дискретными порциями. Причем величина кванта энергии (или порции энергии) оказалась связана с частотой волны:

$$\varepsilon = h\nu = \frac{hc}{\lambda},$$

где ε — энергия кванта излучения, ν — частота электромагнитной волны, λ — длина волны излучения, c — скорость света, а h — постоянная величина, которая в последствии получила название постоянной Планка. На данный момент значение этой величины считается зафиксированной фундаментальной константой и с ней связывают эталон массы. Постоянная Планка равна:

$$h = 6,62607015 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$$

В рамках решения задачи вы можете округлять постоянную Планка до двух значащих цифр и считать ее равной $(6,6 \cdot 10^{-34})$ Дж · с. Для решения задачи вам также могут быть необходимы: скорость света, которую можно будет считать равной $3 \cdot 10^8$ м/с, заряд электрона, который можно считать равным $1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл, масса электрона равная $9,1 \cdot 10^{-31}$ кг и диэлектрическая проницаемость вакуума $\varepsilon_0 \approx 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

Упражнение. Считая, что видимый диапазон электромагнитного излучения лежит в интервале от 400 нм до 750 нм, найдите диапазон энергий, которым могут обладать кванты света видимого диапазона.

Характерные величины в атомной физике

В данном разделе вам будет необходимо, используя метод размерностей, получить выражения для характерных масштабов расстояния и времени, а также некоторых физических величин в атоме водорода.

¹Теоретический анализ излучения черного тела с использованием того факта, что на одну степень свободы приходится энергия $kT/2$ приводил к тому, что любое тело должно излучать бесконечную энергию, что, очевидно, противоречит эксперименту

Считая абсолютными единицами измерения кг, м, с, а также величину электрического заряда, измеряемого в Кулонах, а определяющими параметрами массу электрона, его заряд, постоянную Планка и диэлектрическую проницаемость вакуума ϵ_0 , получите с точностью до безразмерного коэффициента:

- 1.1 (0,1 балла) Радиус атома водорода (боровский радиус) и период обращения электрона в атоме водорода;

Фазовое пространство и фазовые траектории

Пусть некоторая материальная точка осуществляет движение вдоль оси x . Если на нее действуют какие-либо силы, то ее импульс зависит от этой координаты. В физике часто изображают зависимость импульса от координаты в соответствующих осях. Такую координатную плоскость называют *фазовым пространством*, а зависимость импульса от координаты *фазовой траекторией*. Например, если материальная точка движется вдоль оси x с постоянной скоростью, то ее фазовая траектория — прямая линия (см. рисунок). Обратите внимание, что на фазовой траектории указано направление, в котором движется частица. В данном случае она движется в сторону увеличения координаты x , поскольку ее импульс положительный, а значит и проекция скорости также больше нуля.

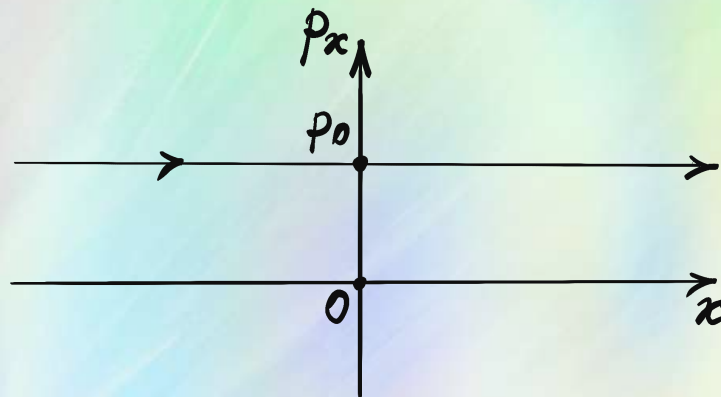


Рисунок 1: Фазовое пространство материальной точки, двигающейся по прямой с постоянной скоростью.

- 1.2 (0,4 балла) Изобразите фазовую траекторию для материальной точки:

- которая движется равноускоренно, начиная своё движение из состояния покоя;
- совершающей гармонические колебания, считая все параметры колебаний известными;
- которая находится между двумя абсолютно упругими параллельными стенками и движется в направлении перпендикулярном к ним.

Правило квантования Бора–Зоммерфельда

Впервые квантование уровней энергии получил датский ученый Нильс Бор для атома водорода. В последствии его метод развил другой физик Арнольд Зоммерфельд. В этом пункте мы предлагаем вам ознакомиться с сутью метода и получить некоторые важные результаты, которые будут нами использоваться в дальнейшем.

Для периодического движения частицы правило квантования Бора–Зоммерфельда можно сформулировать так. При движении частицы фазовая траектория ограничивает объем фазового пространства, величина которого должна быть равна nh , где n — целое число, а h — это постоянная Планка. Или, другими словами, площадь фигуры, ограниченной кривой $(x, p(x))$, должна быть равна целому числу, умноженному на постоянную Планка.

Прямоугольная потенциальная яма

Пусть частица массы m находится в прямоугольной потенциальной яме шириной $2a$, т. е. в таком поле сил, что зависимость потенциальной энергии от координаты имеет вид, представленный на рисунке. В этом случае полная энергия частицы равна кинетической энергии, поскольку во всей области, которая ей доступна, потенциальная энергия равна нулю.

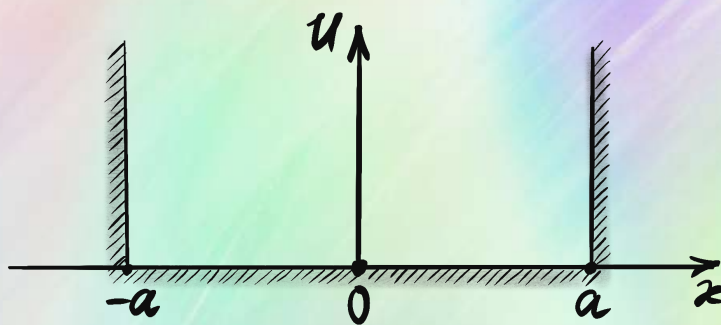


Рисунок 2: Прямоугольная потенциальная яма шириной $2a$ с бесконечно высокими стенками.

Ранее вы уже находили вид фазовой траектории для материальной точки, движение которой ограничено двумя стенками.

1.3 (0,5 балла) Используя для таких фазовых траекторий правило квантования Бора–Зоммерфельда, найдите:

- Возможные значения модуля импульса частицы в терминах h , a и n ;
- Возможные значения энергии частицы в терминах h , a , n и m ;
- Разницу энергий между уровнем с номером n и $n + 1$.

Уровень энергии с номером $n = 1$ называется основным состоянием, а при $n > 1$ — возбужденным состоянием. Модель прямоугольной бесконечной ямы имеет практическое применение. Например, она будет нами использоваться при микроскопическом описании явления сверхпроводимости, когда мы будем объяснять механизм образования куперовских пар.

Квантование момента импульса

Если частица движется по окружности, то у неё квантуется момент импульса частицы L — величина, которая в данной геометрии равна произведению импульса частицы p на радиус окружности R .

Упражнение. Используя правило квантования Бора–Зоммерфельда покажите, что $L = nh/(2\pi)$.

Микроскопическая теория сверхпроводимости

Для описания на микроскопическом уровне явления сверхпроводимости в 1957 году была разработана теория Бардина–Купера–Шриффера, в основу которой легла концепция **куперовской пары** — составной квазичастицы², представляющей собой связанное состояние двух электронов. Другими словами, если в проводниках носителями заряда являются обычные электроны, то в сверхпроводниках ими являются вышеобозначенные куперовские пары. На первый взгляд, существование такого сцепленного состояния двух электронов может показаться контринтуитивным и невозможным, поскольку электроны должны отталкиваться друг от друга. Тем не менее, существует механизм их притяжения посредством кристаллической решётки с последующим образованием пары электронов. Цель данного раздела — качественно объяснить этот механизм притяжения электронов и оценить характерные параметры куперовской пары.

В металле при низких температурах электрон проводимости, движущийся сквозь кристаллическую решётку, вызывает смещение положительных ионов перпендикулярно своей траектории. В результате за электроном образуется область пониженного потенциала, называемая «потенциальной трубкой». Обозначим характерную длину такой трубки как l (протяжённость следа за электроном), а её диаметр будем считать сопоставимым с постоянной решётки³ d , величина которой по порядку величины совпадает с радиусом Бора⁴ и в дальнейшем в этом разделе вы можете считать их равными друг другу.



Рисунок 3: За электроном e , движущимся вправо, возникает область смещения положительных зарядов в виде цилиндрической трубки длиной l и диаметром $\approx d$, которая притягивает отрицательно заряженные частицы.

Сделаем оценку длины трубки l и её заряда ΔQ . В этом разделе все ответы приводите с точностью до постоянного безразмерного множителя.

Для начала оценим скорость движения электрона в металле. Поскольку электрон движется в периодическом потенциале ионов и представляет собой квантовый объект, то с точностью до постоянной величины эта скорость будет определяться постоянной решётки d , массой электрона m и постоянной Планка h .

2.1 (0,1 балла) Используя метод размерностей, получите выражение для характерной скорости электронов в проводнике.

Замечание. Это не скорость, с которой переносится ток в проводниках. Ток — это упорядоченное движение частиц, а здесь мы следим за самыми высокоэнергетичными электронами, которые движутся сами по себе.

²фундаментальное понятие квантовой физики, описывающее коллективное возбуждение в системе многих взаимодействующих частиц

³Физическая величина, определяющая характерный размер кристаллической решётки

⁴Боровский радиус по порядку величины равен $0,5 \text{ \AA}$, а постоянная решётки несколько ангстрем.

Оценим характерное время существования трубки, которое определяется периодом колебания ионов. Для этого предположим, что мы увеличили расстояние между двумя ионами на постоянную решётки и отпустили их, после чего они совершают колебания около положения равновесия.

2.2 (0,1 балла) Считая колебания гармоническими и приравнявая кинетическую энергию иона при прохождении положения равновесия к максимальному значению потенциальной энергии, оцените с точностью до константы частоту таких колебаний. Ответ дайте в терминах ε_0 , e , M и d , где M — масса иона.

2.3 (0,1 балла) Оцените длину трубки l , считая известной постоянную решётки d и отношение массы иона и электрона $M/m = \beta^2$.

2.4 (0,4 балла) Оцените смещение ионов из-за взаимодействия с пролетающим электроном в терминах d и β .

2.5 (0,2 балла) Оцените величину заряда «хвоста» (трубки) ΔQ

Таким образом, к сформировавшемуся положительно заряженному «хвосту» может притянуться второй электрон. Эта возможность качественно объясняет механизм образования куперовской пары за счет взаимодействия электронов с решёткой.

Оценим параметры куперовской пары и условия её существования. В состоянии покоя потенциальная энергия взаимодействия иона с электроном по порядку величины равна $e^2/(\varepsilon_0 d)$. При этом если бы ионы не смещались, то электрон в среднем находился бы в состоянии безразличного равновесия (любые точки внутри проводника были бы друг другу равносильны, т. к. система была бы однородна). Однако смещение ионов в результате пролета электрона изменяет распределение потенциала в области за электроном.

2.6 (0,2 балла) Оцените величину изменения потенциальной энергии взаимодействия электрона с ионом из-за смещения последнего. Считайте, что эта величина определяет глубину потенциальной ямы U , в которой окажутся электроны.

Будем считать, что в результате смещения ионов образовалась глубокая потенциальная яма, в которую попали два электрона (куперовская пара).

Упражнение. Попробуйте объяснить, почему в потенциальную яму притягивается дополнительно только один электрон, а не два, три или больше.

2.7 (0,1 балла) Используя правила квантования Бора–Зоммерфельда, оцените уровни энергии, которые доступны куперовской паре.

Здесь придётся принять как факт, что куперовская пара не может находиться в возбужденном состоянии. Если она переходит на первый возбужденный уровень, то пара разрушается.

2.8 (0,1 балла) Оцените температуру, при которой происходит разрыв куперовской пары, что будет равносильно критической температуре возникновения или исчезновения сверхпроводимости.

2.9 (0,2 балла) Оцените характерный «размер» куперовской пары, сравнив силу взаимодействия электронов с силой взаимодействия электрона с трубкой.

Размер куперовской пары принято называть **длиной когерентности**, т. е. характерной длины, на которой электроны могут притягиваться.

Понятие магнитного момента

В Пятом Эпизоде нам будет необходимо много работать с магнитными свойствами различных веществ, и для этого нам необходимо ввести понятие магнитного момента, которое является одним из основных понятий при работе с любыми магнитными явлениями. Формальное общее определение магнитного момента имеет вид:

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int [\mathbf{j}, \mathbf{r}] dV,$$

где \mathbf{j} — плотность электрического тока в элементе объема dV , \mathbf{r} — радиус-вектор этого объема, а квадратными скобочками обозначено векторное произведение. Однако для нас более наглядным и полезным будет частный случай этого определения, данный для магнитного момента контура с током. Если по границе некоторого плоского контура площади S течет ток силы I , то магнитный момент такого витка с током будет равен

$$\mathbf{m} = IS\mathbf{n},$$

где \mathbf{n} — единичный вектор нормали к плоскости витка, который определяется правилом буравчика, вращение которого задается направлением тока.

3.1 (0,2 балла) Электрон движется по горизонтальной окружности радиуса R так, что если смотреть на эту окружность сверху, он движется по часовой стрелке. Период обращения электрона T . Чему равен модуль вектора магнитного момента? Сделайте рисунок и укажите на нём его направление.

Магнитный момент и его магнитные свойства во многом схожи с электрическими свойствами дипольного момента, про который шла речь во Втором Эпизоде Седьмого Сезона Кубка ЛФИ. Так, магнитное поле, которое создаёт магнитный момент на расстояниях много больших его линейных размеров определяется выражением:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3\mathbf{r}(\mathbf{m}, \mathbf{r}) - \mathbf{m}r^2}{r^5},$$

где \mathbf{r} — радиус вектор, проведенный от элемента с током в точку наблюдения. Видно, что это выражение структурно ничем не отличается от выражения для напряженности электрического поля точечного диполя, которое мы давали вам в Альтернативной задаче Второго Эпизода.

На этом аналогия между электрическим и дипольным моментами не заканчивается. Если поместить электрический дипольный момент \mathbf{p} в электрическое поле \mathbf{E} , а магнитный момент \mathbf{m} в магнитное поле \mathbf{B} , то они будут обладать потенциальной энергией, которая для электрического дипольного момента равна:

$$U = -(\mathbf{p}, \mathbf{E}),$$

а для магнитного момента:

$$U = -(\mathbf{m}, \mathbf{B}).$$

Из последнего выражения следует, что магнитному моменту энергетически выгодно располагаться по направлению магнитного поля. Собственно так и работает стрелка компаса,

который является небольшим магнитным моментом и направлен по направлению силовых линий магнитного поля.

В завершении этого раздела отметим, что магнитным моментом обладают элементарные частицы, атомные ядра, а также электронные оболочки атомов и молекул. Причины возникновения таких магнитных моментов связаны с молекулярными токами, т.е. токами существующими внутри атомов, молекул или ионов. В школе вы с ними сталкивались в первую очередь на уроках химии, когда заполняли электронные оболочки различных элементов. При этом электроны вы обозначали стрелочками, направленными вверх или вниз, что отвечало направлению спина электрона, который и определяет направление его магнитного момента. Если суммарный спин у оболочки отличен от нуля (например, как у атома лития), то такой атом обладает ненулевым магнитным моментом.

Теория фазовых переходов Ландау

В 8 классе вы изучали фазовый переход первого рода (например, таяние льда или кипение воды). В этом случае на графике зависимости энергии вещества, его плотности или концентрации от температуры наблюдается резкий скачок при смене фазы. Например, при плавлении льда при 0°C скачком изменяется внутренняя энергия тела и плотность.

Переход же в сверхпроводящее состояние — это фазовый переход второго рода. При таких фазовых переходах энергия и плотность вещества не испытывает резкого изменения, однако скачком изменяются такие параметры как теплоёмкость, сжимаемость и т.д. Для описания таких фазовых переходов можно использовать теорию Ландау, которая строится на таком важном понятии как **параметр порядка**.

Параметр порядка

Параметр порядка — это ~~нараметр~~ ~~порядка~~ количественная характеристика, показывающая степень упорядоченности среды, т.е. ~~нараметр~~ ~~порядка~~. При фазовом переходе первого рода он изменяется скачком. Например, резкое исчезновение кристаллической структуры в процессе плавления, что, в частности, приводит к резкому изменению плотности вещества. При фазовом же переходе второго рода параметр порядка изменяется **непрерывно**. При этом принято считать, что в **неупорядоченной фазе он равен нулю, а в упорядоченной фазе принимает ненулевое значение**. Для начала, в качестве тренировки рассмотрим данное понятие на примере магнитных свойств таких веществ, как парамагнетики и ферромагнетики, поскольку это будет более наглядно, чем при рассмотрении явления сверхпроводимости.

Магнитные свойства вещества во многом определяются двумя факторами:

1. Наличие или отсутствие магнитного момента у его атомов или молекул.
2. Тем, как эти магнитные моменты взаимодействуют друг с другом

Если у молекул нет собственного магнитного момента (например, как у молекул воды или инертных газов), то они, как правило, проявляют свойства **диамагнетиков**. При помещении их в магнитное поле в них наводятся магнитные моменты, направленные в противоположную сторону. Такие соединения слабо проявляют магнитные свойства.

Если же у молекул есть собственный магнитный момент, например как у гадолиния, то они достаточно сильно реагируют на воздействие внешнего магнитного поля, и их поведение

зависит от величины этого магнитного поля и температуры. Если температура достаточно велика, то такие соединения как правило проявляют свойства **парамагнетиков**. В отсутствии магнитного поля из-за теплового движения магнитные моменты отдельных атомов или молекул направлены в случайном направлении, и среднее значение магнитного момента в веществе равно нулю. Если же мы поместим его во внешнее магнитное поле, то в этом случае появляется выделенное направление. Магнитные моменты начинают выстраиваться по направлению магнитного поля, т. к. им это энергетически выгодно. При этом из-за наличия теплового движения не все магнитные моменты будут направлены в одну и ту же сторону, однако среднее значение магнитного момента будет отличным от нуля. Если же мы выключим внешнее магнитное поле, то магнитные моменты атомов или молекул снова будут направлены хаотично, и среднее значение суммарного магнитного момента такого соединения снова будет равно нулю.

Однако для некоторых веществ, называемых **ферромагнетиками**, существует температура, называемая **температурой Кюри**, такая что, если вещество охладить ниже этого значения, то ситуация станет принципиально иной. В таких веществах молекулы достаточно сильно взаимодействуют друг с другом и стремятся направить свои магнитные моменты в одну сторону. Если такое взаимодействие оказывается сильнее, чем влияние тепловых флуктуаций (что происходит при температурах ниже температуры Кюри), то среднее значение магнитного момента вещества в целом может быть отличным от нуля и при отсутствии внешнего магнитного поля. Если же оно оказывается слабее (что происходит при температурах выше температуры Кюри), то среднее значение магнитного момента будет равно нулю и вещество будет себя вести как парамагнетик.

Собственно все магниты, с которыми вы сталкиваетесь в быту, являются как правило ферромагнетиками, у которых температура Кюри выше, чем комнатная температура. Так, для железа она равна 1043 К. Встречаются ферромагнетики, у которых температура Кюри сопоставима с комнатной. Например, для упомянутого выше гадолиния, температура Кюри равна 289 К. Изменение магнитных свойств при переходе точки Кюри является примером фазового перехода второго рода. Предлагаем разобраться на примере перехода парамагнетик-ферромагнетик с понятием параметра порядка.

Рассмотрим двумерную решетку, состоящую из атомов, имеющих магнитный момент, который может быть направлен либо вниз, либо вверх.

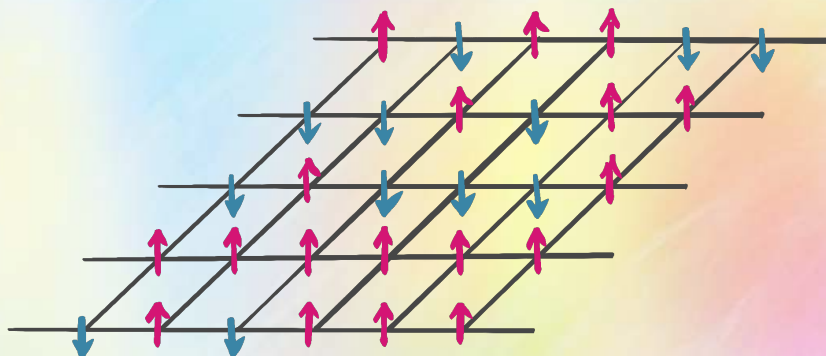


Рисунок 4: Модель двумерной решетки из атомов. Стрелочками обозначены направления их магнитных моментов.

В данном пункте за параметр порядка предлагается взять величину среднего магнитного момента решеток, состоящих из атомов с магнитным моментом m_0 каждый.

- 4.1 (0,3 балла) Для трех случаев, представленных на рисунке, найдите величину среднего магнитного момента и укажите, в каком состоянии находится вещество. Считайте, что образец в это время НЕ находится в магнитном поле.

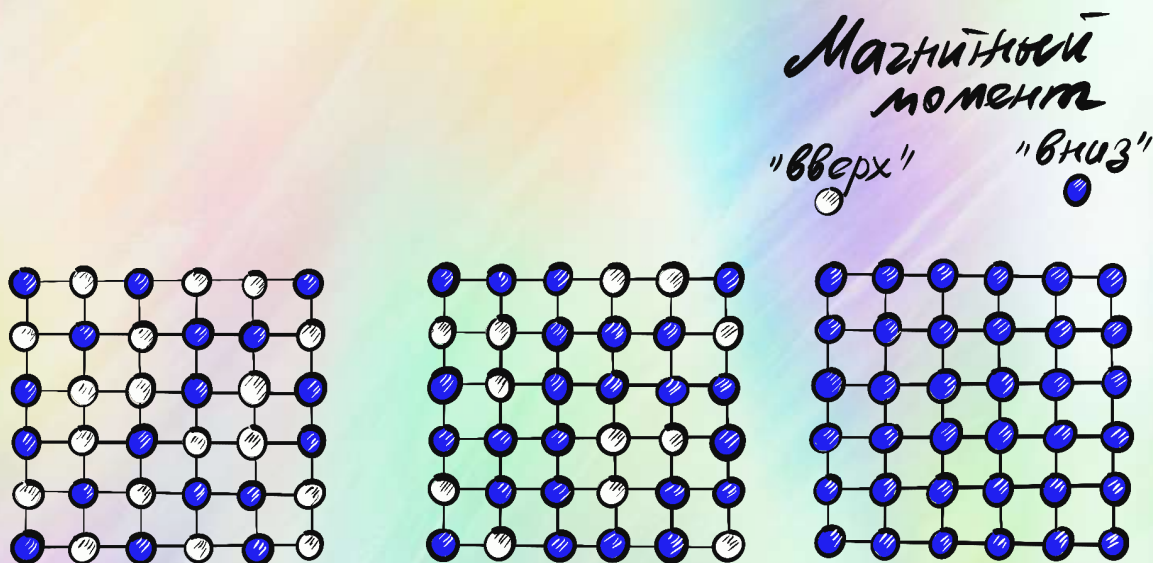


Рисунок 5: Устойчивые к флуктуациям конфигурации решеток из атомов с магнитными моментами m_0 .

Теперь вернемся к сверхпроводникам. У них есть температура фазового перехода — критическая температура T_c , которая аналогична температуре Кюри у ферромагнетиков. Если температура вещества выше T_c , то вещество ведёт себя как обычный проводник, а если ниже, то как сверхпроводник. Для описания фазового перехода в сверхпроводниках будем использовать параметр порядка в виде концентрации куперовских пар.

- 4.2 (0,2 балла) В данном пункте будем считать, что куперовские пары равномерно образуются внутри образца. Пусть температура образца была выше T_c , а концентрация электронов n_0 . В процессе охлаждения начался фазовый переход и в некоторый момент концентрация обычных электронов стала равна n_1 . Чему равен параметр порядка такого образца?

При условиях, которые будут обсуждаться дальше, в сверхпроводящем состоянии могут создаваться «нити» нормальной фазы. Разберемся с определением параметра порядка и для такой ситуации. На рисунке, приведенном ниже изображен сверхпроводник часть объема которого находится в нормальном состоянии (т.е. не обладает свойством сверхпроводимости).

- 4.3 (0,2 балла) Оцените среднее по объему образца значение параметра порядка для сверхпроводника, в котором есть нормальная фаза (отмеченная черным), зная, что концентрация куперовских пар в его сверхпроводящей части n_s .

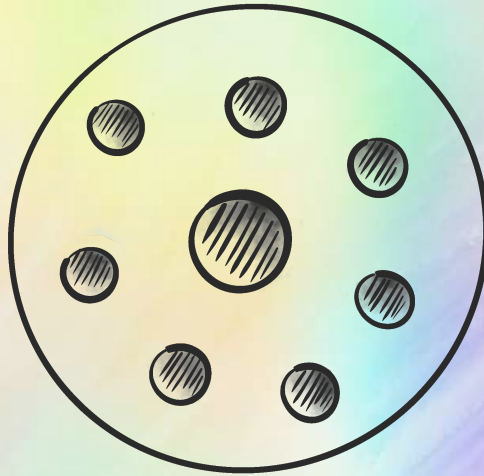


Рисунок 6: Сечение цилиндрического образца в состоянии фазового перехода. Заштрихованные островки — нормальная фаза, которая не обладает свойствами сверхпроводимости.

Функционал Ландау

Используем знания о свойствах параметра порядка для построения теории Ландау — феноменологического подхода к описанию фазовых переходов второго рода. В рамках этой теории принято считать, что фазовый переход второго рода происходит равномерно во всём объеме образца и характеризуется параметром порядка η , который будет одинаков в любой его точке (что является допущением, которое в последствии было уточнено в теории Гинзбурга–Ландау).

Вблизи фазового перехода (когда температура стремится к критической, $T \rightarrow T_c$) параметр порядка мал, поэтому по нему можно разложить энергию рассматриваемого объема образца по формуле Тейлора:

$$E(T) = E_0(T) + E'_\eta(T)\eta + \frac{E''_\eta(T)}{2}\eta^2 + \frac{E'''_\eta(T)}{6}\eta^3 + \frac{E''''_\eta(T)}{24}\eta^4 + \dots, \quad \eta \xrightarrow{T \rightarrow T_c} 0.$$

Из изотропности системы следует, что все члены с нечетными степенями равны нулю. Перепишем формулу в более простом виде:

$$E(T, \eta) = E_0(T) + \alpha(T)\eta^2 + \beta(T)\eta^4 + \dots, \quad \eta \xrightarrow{T \rightarrow T_c} 0.$$

В устойчивом положении равновесия значение параметра порядка системы таково, что её энергия принимает значение локального минимума.

Упражнение. Рассматривая энергию как функцию параметра порядка η , коэффициенты которой зависят от температуры образца T , исследуйте количество возможных положений равновесия для данного выражения в зависимости от знака коэффициентов α и β .

Упражнение. Какой знак у коэффициентов $\alpha(T)$ и $\beta(T)$ при температурах выше критической, когда образец может находиться только в состоянии обычного проводника и других равновесных состояний быть не может.

Упражнение. Какой знак у коэффициентов $\alpha(T)$ и $\beta(T)$ при температурах ниже критической.

- 4.4 (0,4 балла) Предполагая, что материал во время охлаждения остается в локальном минимуме по энергии, предложите функции $\alpha(T)$ и $\beta(T)$ в виде полиномов как можно меньшей степени, которые способны описать фазовый переход второго рода.
- 4.5 (0,3 балла) Найдите зависимость концентрации куперовских пар (параметра порядка) от температуры. Ответ дайте в терминах $\alpha(T)$ и $\beta(T)$.
- 4.6 (0,1 балла) Нарисуйте график зависимости параметра порядка η , отвечающего равновесному состоянию образца в зависимости от его температуры.

Мы говорили в начале задачи, что при фазовом переходе второго рода скачком изменяется теплоёмкость образца. Найдём его величину. Из курса термодинамики следует, что для такого определения энергии E оказывается, что теплоёмкость образца определяется выражением⁵:

$$C = -T \frac{\partial^2 E}{\partial T^2}$$

- 4.7 (0,2 балла) Найдите значение скачка теплоёмкости при фазовом переходе.

⁵ Дело в том, что энергия E , определяемая в функционале Ландау является не внутренней энергией образца, а свободной энергией. Поэтому расчёт теплоёмкостей ведется несколько иначе.

Магнитные свойства сверхпроводников

Если сверхпроводники поместить в магнитное поле, то они проявляют интересные свойства. Например, эффект Мейснера, который состоит в том, что сверхпроводник не терпит внутри себя магнитного поля и всегда создаёт на своей поверхности токи, которые экранируют его вещество от внешних магнитных полей. Это происходит подобно тому, как заряд перераспределяется на поверхности проводника, помещенного во внешнее электрическое поле. При этом если изучать данный вопрос детальнее, то становится понятно, что магнитное поле все же проникает внутрь сверхпроводника, но на небольшую глубину, которая называется лондоновской глубиной проникновения. В этой части задачи мы предлагаем вам получить формулу для этого параметра.

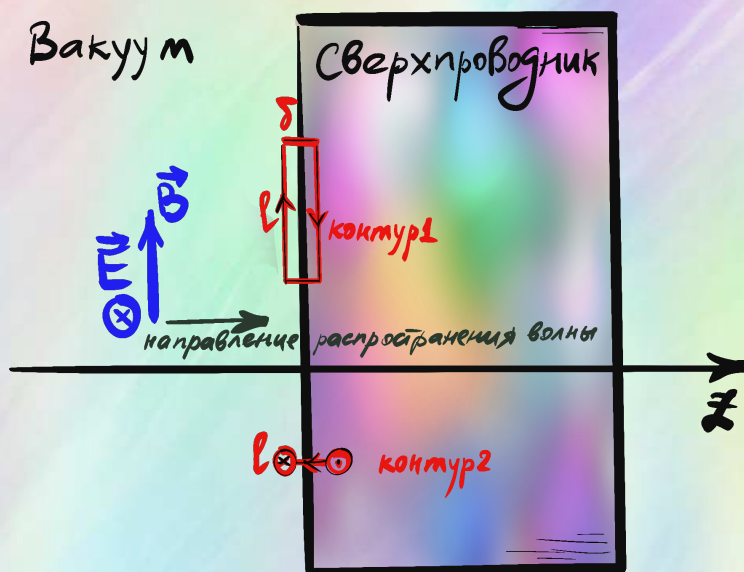


Рисунок 7: Переход электромагнитной волны из вакуума в сверхпроводник.

- Рассмотрим плоскую границу, по одну сторону от которой находится полубесконечный сверхпроводник, а по другую — вакуум. Пусть на эту границу падает плоская электромагнитная волна так, что угол падения равен нулю (т.е. вектор электрического и магнитного полей параллелен границе раздела сверхпроводник-вакуум).
- Выделите вытянутый узкий прямоугольный контур, длинные стороны которого параллельны вектору индукции магнитного поля и находятся по разные стороны от границы раздела и запишите для него теорему о циркуляции магнитного поля, считая, что по границе сверхпроводника течёт электрический ток параллельно вектору напряжённости. Также считайте, что короткая сторона прямоугольного контура сколь угодно мала и ее можно считать дифференциалом от длины. Током смещения можно пренебречь.
- Выделите аналогичный контур, длинные стороны которого будут параллельны вектору напряженности электрического поля и запишите для него закон электромагнитной индукции.
- Запишите определение для плотности электрического тока в терминах концентрации куперовских пар n_s , величины заряда куперовской пары $2e$ и их скорости v . Продифференцируйте это выражение по времени.

- Дополните получившуюся систему уравнений вторым законом Ньютона, записанным для одной куперовской пары.

Разрешите получившуюся систему уравнений и получите одно уравнение на производную магнитного поля по времени $\dot{\mathbf{B}}$.

5.1 (0,5 балла) Анализируя получившееся уравнение найдите характерную длину проникновения магнитного поля внутрь сверхпроводника.

При решении этого пункта можно как получить точное решение данного уравнения, выбрав граничные условия из физических соображений, так и проанализировать его с точки зрения размерностей.

Мы исследовали эффект выталкивания магнитного поля сверхпроводником, однако он всё же не может экранировать любое бесконечно большое магнитное поле. При достижении некоторого критического значения B_c сверхпроводимость все же разрушается. Величину этого поля можно оценить из теории Ландау, сравнив энергетическую выгоду от фазового перехода с энергией магнитного поля.

5.2 (0,3 балла) Считая объем образца равным V , найдите зависимость критического магнитного поля B_c от температуры образца T вблизи фазового перехода.

Двухжидкостная модель

Как можно было заметить подходов с помощью которых описывается явление сверхпроводимости достаточно много. Мы уже познакомились с микроскопическим подходом, а также с теорией Ландау, которая является общей теорией для фазовых переходов второго рода, как и её более точное продолжение в виде теории Гинзбурга–Ландау, которая не анализируется в этом Эпизоде (хотя это можно было бы сделать, но так Эпизод бы вышел еще позже. ~~Ждите в Альтернативе ахахахахахаха~~).

Однако одной из самых первых феноменологических теорий, которая описывала явление сверхпроводимости была **двухжидкостная модель**. И как любая феноменологическая модель, она формировалась, опираясь на результаты эксперимента, ставя своей целью эти результаты объяснить. В данном разделе мы познакомимся с этой теорией.

В рамках этой модели предполагалось, что электроны внутри сверхпроводника представляют собой жидкости, которые могут течь внутри образца. При этом постулировалось существование двух типов жидкостей — нормальной и сверхпроводящей, а энергия электронов в сверхпроводнике делилась между этими фазами. Другими словами электроны разделялись на те, которые обеспечивают бездиссипативное течение тока (сверхпроводящее состояние, которое в последствии при разработке микроскопического подхода стало называться куперовскими парами), и обычные электроны проводимости (как в металле). Наконец в рамках данной модели предполагалось, что энергия электронов имеет вид:

$$E_s(T, x) = Ax^\alpha \varepsilon_n(T) + (1 - x)\varepsilon_s,$$

где x — доля обычных электронов проводимости, α — феноменологический параметр модели, $\varepsilon_{n,s}$ — удельные энергии состояний, причём ε_n зависит от температуры, а ε_s в рамках модели считается постоянной величиной. Индексы n, s отвечают нормальной и сверхпрово-

дующей фазам соответственно⁶. В этом пункте мы хотим найти параметры данной модели, считая известными два экспериментальных факта:

1. Вклад сверхпроводящих электронов в теплоёмкость образца вблизи критической температуры пропорционален T^3 . По современным представлениям и измерениям, это не совсем так. Тем не менее это предположение адекватно для первичных данных, полученных с 1910 по 1930 годы, а также для данной части задачи. Кроме того, она обладала предсказательной силой, что мы и продемонстрируем, когда будем получать зависимость критического значения магнитного поля от температуры.
2. Из теории твёрдого тела следует (и к моменту обнаружения сверхпроводников было хорошо известно), что зависимость теплоёмкости металлов, т. е. обычных проводников, от температуры определяется двумя основными вкладами: движение свободных электронов в металле и колебания решётки. Степени входящие в эту зависимость вам пока неизвестны, но при низких температурах можете считать, что основной вклад даёт движение электронов.

Мы предлагаем вам поработать с результатами эксперимента по исследованию зависимости теплоёмкости металла от температуры. Откройте [проект](#) в Google Colab и найдите клетку «Теплоёмкость металла». Внутри кода вшиты результаты измерений теплоёмкости металла C (мДж·моль⁻¹К⁻¹) от температуры T (К).

- 6.1 (0,3 балла) Подберите, какие рациональные функции нужно отложить по осям, чтобы зависимость получилась линейной. По оси ординат должна быть функция, содержащая теплоёмкость и температуру, по оси абсцисс — только температуру.
- 6.2 (0,2 балла) Определите степень зависимости низкотемпературной теплоёмкости от температуры для обычного металла. Ответ предполагается в виде целого числа.
- 6.3 (0,2 балла) Используя полученные данные, найдите, какой степени T пропорциональна $\varepsilon_n(T)$. В дальнейшем при необходимости можете считать, что коэффициент пропорциональности вам известен.
- 6.4 (0,2 балла) В равновесном состоянии значение концентрации обычных электронов x таково, что энергия E_S минимальна. Считая $\varepsilon_n > 0$, определите знак A и ε_s .
- 6.5 (0,4 балла) Пользуясь тем фактом, что при повышении температуры от нуля до критической температуры T_c все электроны переходят в нормальное состояние, определите зависимость $x(T)$. Ответ дайте в терминах T и T_c .
- 6.6 (0,3 балла) Подставляя эту зависимость во второе слагаемое правой части для выражения $E_s(T, x)$ и используя известные вам экспериментальные факты, найдите степень α .

В теории Ландау мы нашли зависимость критического магнитного поля от температуры вблизи T_c . Воспользуемся преимуществом двухжидкостной модели, которая не ограничена областью применимости формулы Тейлора, для получения зависимости критического магнитного поля в более широком диапазоне температур.

Перепишите выражение для энергии $E_s(T, x)$ в терминах ε_s , T и T_c . Этот результат корректен при отсутствии магнитного поля, однако если мы поместим образец в достаточно

⁶Обозначения n и s идут от английского “normal” и “superconducting”

сильное магнитное поле, то электроны перейдут из сверхпроводящего состояния в обычное (произождёт разрыв куперовских пар). При этом объем образца заполнится магнитным полем, поэтому для оценки зависимости критического магнитного поля в рамках двухжидкостной модели вы можете применить подход, аналогичный тому, который мы использовали в теории Ландау, т. е. сравнивая энергетический выигрыш от фазового перехода с энергией магнитного поля.

6.7 (0,4 балла) Найдите зависимость поля, разрушающего сверхпроводящее состояние, от температуры сверхпроводника $B_c(T)$.

Упражнение. Установите связь параметра ε_s с энергией магнитного поля.

Вихри Абрикосова

В последствии более глубокие исследования показали, что разрушение сверхпроводящего состояния в присутствии внешнего магнитного поля может идти по двум сценариям. В первом случае, который обсуждался ранее, сверхпроводимость подавляется во всём объеме образца при достижении определенного значения внешнего магнитного поля, что отвечает сверхпроводникам первого рода.

Во втором случае процесс устроен несколько сложнее. Существует **первое критическое поле** B_{c1} , при котором сверхпроводящее состояние начинает разрушаться, т. е. внутри сверхпроводника возникают области нормальной фазы в которой возможно наличие магнитного поля и **второе критическое поле** B_{c2} , при котором сверхпроводимость полностью исчезает. Такие сверхпроводники называются сверхпроводниками второго рода.

К первому роду относится большинство металлов, а ко второму — большинство сплавов. Советский ученый Абрикосов установил, что разрушение сверхпроводимости происходит за счёт появления вихрей, образующих регулярную периодическую структуру. О них и пойдет речь в этом разделе.

Вихрь — это некоторая структура внутри сверхпроводника, состоящая из двух частей. В его сердцевине находится область нормальной фазы⁷ (серая область, отмеченная буквой n на рисунке), вокруг которой движутся по окружностям куперовские пары (оранжевая область, отмеченная буквой s на рисунке 8). При этом внутрь вихря проникает магнитное поле так, что в его центре значение индукции магнитного поля заметно больше, величины поля на его периферии.

Интересно, что вихри образуют треугольную периодическую структуру в сечении сверхпроводника, а в продольном сечении их можно представить как цилиндры (нити).

⁷Фаза, где нет куперовских пар

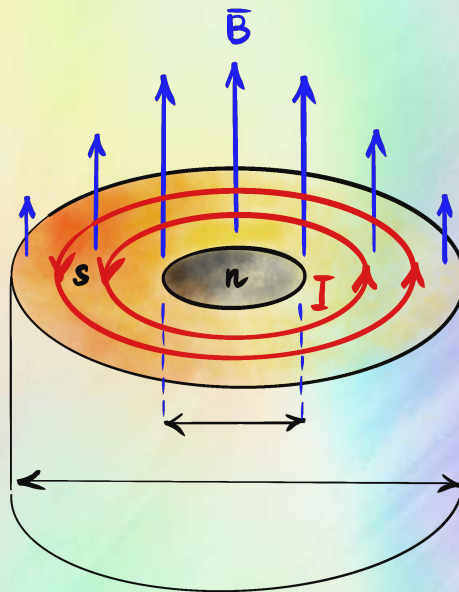


Рисунок 8: Характерный вид абрикосовского вихря (в форме абрикоса).

7.1 (0,2 балла) На картинке 8 не подписаны характерные размеры сердцевин вихря, где уже сформирована нормальная фаза, и внешняя часть, где еще есть куперовские пары, но куда уже проникает магнитное поле. Что из этих размеров является лондоновской глубиной, а что длиной когерентности («размером» куперовской пары) в сверхпроводнике второго рода?

Квантование магнитного потока

Рассмотрим процесс зарождения вихря и покажем, что поток магнитного поля, который идет через него квантуется. Мысленно выделим контур в виде окружности радиуса r , который охватывает ту область, где будет появляться вихрь. На его границе находятся куперовские пары и когда вихрь будет образовываться, на них будет действовать сила, обусловленная индуцированным электрическим полем.

7.2 (0,3 балла) Найдите величину кванта магнитного потока. Для этого:

- Найдите величину импульса куперовской пары в терминах заряда электрона e , r и потока, который пронизывает вихрь Φ .
- Используя правило квантования Бора-Зоммерфельда для момента импульса, получите элементарный квант магнитного потока.

Первое критическое магнитное поле B_{c1}

Сделаем оценку на величину первого критического магнитного поля B_{c1} , используя аналогию со спутниками, которые движутся по периодическим траекториям в том случае, если их полная энергия меньше нуля. Аналогично поступим с куперовскими парами. Будем считать, что полная энергия любой куперовской пары до образования вихря равна нулю, а когда вихрь образовался, то полная энергия любой куперовской пары, которая движется в магнитном поле внутри вихря (оранжевая зона, отмеченная буквой s на рисунке) должна быть меньше нуля.

7.3 (0,4 балла) Найдите величину первого критического поля в терминах Φ_0 и Λ . Для этого

- а) Запишите выражение для кинетической энергии отдельной куперовской пары, используя правило квантования Бора–Зоммерфельда для её момента импульса.
- б) Запишите выражение для её магнитного момента, если она совершает движение по окружности, и выпишите выражение для потенциальной энергии такого магнитного момента.
- в) Для оценки величины первого критического поля можно приравнять кинетическую энергию и модуль потенциальной энергии магнитного момента, считая, что радиус орбиты куперовской пары совпадает с лондоновской длиной Λ , а магнитное поле B распределено равномерно по вихрю.

Второе критическое магнитное поле B_{c2}

Теперь оценим второе критическое поле, т. е. внешнее магнитное поле B_{c2} , при котором сверхпроводящая фаза полностью исчезнет и полностью пропадёт экранировка сверхпроводящими токами этого внешнего поля. Эту оценку мы будем проводить, исходя из того, что вихри образуют периодическую треугольную структуру характерный размер которой зависит от величины внешнего магнитного поля. При достижении второго критического поля период такой решётки из вихрей сопоставим с длиной когерентности (размерами куперовской пары).

7.4 (0,4 балла) Пусть вихри образуют равносторонний треугольник со стороной a и располагаются в его вершинах. Будем считать, что каждый вихрь несёт один квант потока Φ_0 . Если внешнее поле достигает значения B_{c2} , то суммарный поток внешнего поля через образец равен суммарному потоку через все вихри. Исходя из этого оцените величину B_{c2} .

Метод изображений в сверхпроводниках

Для описания магнитных свойств сверхпроводников, которые расположены во внешнем магнитном поле можно использовать метод изображений, аналогичный тому, что мы использовали во Втором Эпизоде Седьмого Сезона Кубка ЛФИ. Отличие заключается лишь в том, что в случае электростатики изображения подбирались таким образом, чтобы занулить тангенциальную компоненту электрического поля, а в магнитостатике, в случае сверхпроводников I рода, изображение подбирается таким образом, чтобы занулить нормальную компоненту магнитного поля.

Эффект Мейснера в сверхпроводниках I рода

Малый плоский виток с током (магнитный диполь) с магнитным моментом μ помещают в точку на высоте H над плоской поверхностью сверхпроводника первого рода, который занимает область пространства $z < 0$. Вектор магнитного момента витка образует угол θ с вертикальной осью z . Вследствие эффекта Мейснера сверхпроводник полностью выталкивает магнитное поле из своего объёма, так что нормальная компонента поля на поверхности $z = 0$ обращается в нуль: $B_n = 0$ при любом положении витка с током. Лондоновскую глубину проникновения поля считать пренебрежимо малой: $\Lambda \ll H$.

8.1 (0,5 балла) Найдите вертикальную (вдоль оси z) силу, действующую на диполь со стороны сверхпроводника.

Виток с током над жестким сверхпроводником II рода

Малый плоский виток с током массы M и магнитным моментом μ_z , направленным вертикально вверх вдоль оси z , расположен на высоте h_0 над плоской поверхностью образца, который занимает область пространства $z < 0$. Образец охлаждают до перехода в сверхпроводящее состояние второго рода с сильным пиннингом⁸, магнитные свойства которого будут описаны ниже, после чего виток перемещают вдоль оси z в положение равновесия.

Известно, что $(4Mg\pi h_0^4)/(6\mu_0\mu_z^2) = 1 - 16/81$. Ускорение свободного падения g и направлено против оси z .

8.2 (1 балл) Найдите равновесные положения витка после охлаждения и исследуйте найденные положения равновесия на устойчивость по вертикали.

В отличие от эффекта Мейснера для сверхпроводников I рода, при котором поле выталкивается из сверхпроводника при любых условиях, в сверхпроводниках **второго рода** с сильным пиннингом (чтобы это ни значило) реализуется качественно иной режим. При охлаждении в присутствии внешнего поля вихри Абрикосова проникают в образец и оказываются **закреплены** на дефектах кристаллической решётки. Из закона Фарадея и условия равенства нулю сопротивления следует, что нормальная компонента поля B_n на поверхности $z = 0$ сохраняет то значение, которое существовало в момент охлаждения, и остаётся неизменным при любых последующих смещениях витка. Это предел **абсолютно жёсткого сверхпроводника**: сила пиннинга столь велика, что вихри не перераспределяются в ответ на движение витка, и распределение \mathbf{B} внутри образца сохраняется. Считайте, что экранирующие поверхностные токи сосредоточены в слое, пренебрежимо тонком по сравнению с расстоянием до витка, т. е. $\Lambda \ll h_0$.

Первый Хинт — 28.05.2026 12:00 (МСК)

Второй Хинт — 30.05.2026 12:00 (МСК)

Финал Пятого Эпизода — 31.05.2026 20:00 (МСК)

Разбор Пятого Эпизода — 31.05.2026 20:00 (МСК)

⁸Если вам не понятно слово «пиннинг», игнорируйте его