



# Кубок 7 ЛФИ

11.s07.e04

## Hint 2

**ВАЖНО!** Задача является одновременно и Хинтом, и альтернативой к основной задаче. Три важных момента:

1. Вы можете продолжать присылать решение основной задачи.
2. В любой момент до финального дедлайна вы можете перейти на решение *альтернативной задачи*. Если вы это делаете, то в самом начале решения напишите: *Я перехожу на решение альтернативной задачи!* В этом случае Штрафной коэффициент за альтернативную задачу будет равен

$$0,7 \cdot \sum_i \frac{k_i \cdot p_i}{10},$$

где  $p_i$  — балл за пункт, а  $k_i$  — штрафной коэффициент за соответствующий пункт на момент перехода на Альтернативную задачу. Другими словами, максимальный балл за альтернативную задачу равен максимальному баллу, который вы можете получить в момент перехода на нее, умноженному на 0,7. Заметим, что штрафной коэффициент не может быть меньше 0,1. Также напоминаем, что решения основной задачи с этого момента не проверяются. Будьте внимательными!

3. Задача состоит из нескольких пунктов. Штрафной множитель, заработанный **до этого** применяется ко всем пунктам. В дальнейшем каждый пункт оценивается как отдельная задача. Если вы присылаете решение без какого-либо пункта, то его решение считается Incorrect. Более подробно о начислении баллов для составных задач смотрите в Правилах проведения Кубка.

## Альтернативная задача

Сурок стоял на платформе Новодачная. Небольшой узелок упирался приятной тяжестью в мягкую шёрстку, а маленькие домики вокруг напоминали ему о его родном хуторке. Причина столь дальней поездки была прозаична. Сурок хотел забрать честно выигранный год назад Мерч Кубка ЛФИ, а заодно подать документы на Физтех.

Вдали он увидел большую компанию людей студентов, явно спешащих на шашлыки в близлежащую рощу. «К дождю», — подумал Сурок и потопал в сторону Главного корпуса.

В приёмном-некое приёмной комиссии он довольно долго объяснял, что у него нет такой завидной возможности как подача документов через Госуслуги, т. к. там не предусмотрена категория абитуриентов «Сурки», и именно поэтому он приехал сам лично, чтобы узнать, что ему делать. Но делать было нечего, поэтому его отправили в МФЦ. Там, получив талончик, он стал ожидать своей очереди, и когда его номерок высветился на электронном табло, он обнаружил, что ему нужно в окошко «9<sup>3/4</sup>». Сурок начал в панике метаться по МФЦ, но в итоге не придумал ничего лучше, чем поверить в себя и с разбегу вписаться в стену между окошками «9» и «10».

Очнулся Сурок возле странной промзоны, на входе в которую красовалась надпись «Химический завод тонкого органического синтеза (ТОС)». Голова у Сурка немного болела, в глазах потихоньку оседали звёздочки, лапки слегка ломило, а в воздухе ощущался характерный кислотный запах. В добавок ко всему явно начинал идти дождь, который и привёл в чувство нашего героя. «Заподозрить неладное можно было уже в тот момент, когда московский вуз оказался в Долгопрудном», — подумал Сурок и направился внутрь завода.

Блуждая по заброшенной территории, он прислушивался к своим ощущениям, принимался и вообще был настороже. Возможно, именно поэтому он обнаружил, что капли местного дождя сильно отличаются по своему химическому составу от росинок на стебельках растений, которые он изучал, когда бродил в тумане в своём родном хуторке.

«Любопытно», — сказал Сурок и начал их изучать внимательнее.

## Часть 1. Заводной Сурок

### Куда попадает свет?

Сурок изучает шарообразную каплю воды. На каплю падает луч света с прицельным параметром  $p = r/R$  (смотри рисунок, сделанный Сурком в своём дневнике 1). Пусть луч испытывает  $k$  отражений внутри капли.

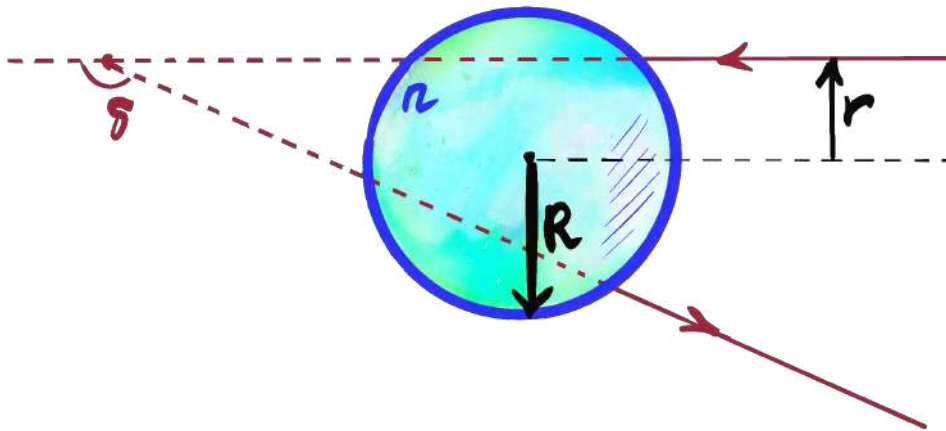


Рисунок 1: Капля. Гелевая ручка. 2026

1. (1 балл) Найдите угол отклонения луча  $\delta \in [0, \pi]$  в зависимости от прицельного параметра  $p$ , числа отражений  $k$  и показателя преломления  $n$ . Дайте численный ответ в **радианах** для следующих наборов чисел:

- а)  $n = 1,20$ ;  $p = 0,60$ ;  $k = 2$ ,
- б)  $n = 1,50$ ;  $p = 0,20$ ;  $k = 1$ ,
- в)  $n = 2,20$ ;  $p = 0,95$ ;  $k = 4$ .

«Получается, что шарообразные капли отклоняют лучи на угол  $\delta(p)$ . А поскольку отклонение сферически симметрично, то результирующая картина также является сферически симметричной, отсюда и форма радуги», — подумал Сурок и сделал рисунок 2 в своей дорожной тетради.

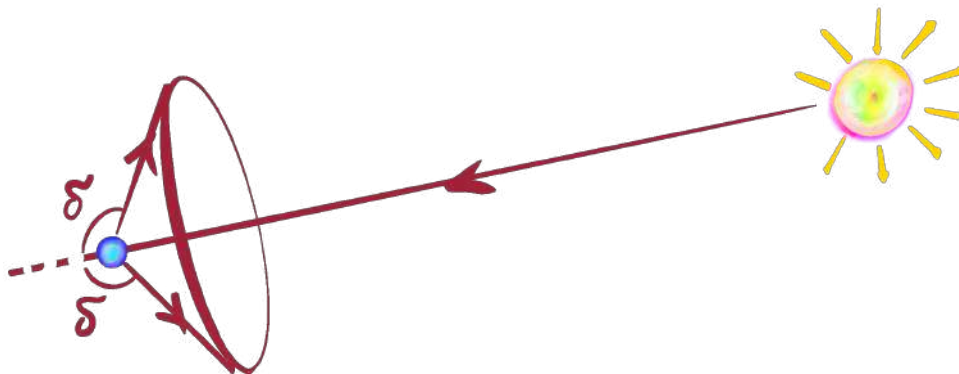


Рисунок 2: Для данного  $p$  лучи отклоняются на угол  $\delta$  во всевозможных направлениях, образуя сферически симметричную картинку. Карандаш. 2026.

«Разумеется, радугу формирует не одна капля, а целая дождевая завеса», — продолжил свои рассуждения зверь.

Рассмотрим некоторый прицельный параметр  $p$  и изучим те капли, которые сформируют картинку у нашего травоядного. При фиксированном параметре  $p$  капли отклоняют лучи в некоторый конус с известным углом  $\delta$  при вершине<sup>1</sup>. При этом в сурка попадают только некоторые лучи из этого конуса (смотри рисунок 3, сделанный в дорожных заметках зверька). В итоге животное «семейства беличьи» видит круговую картинку, сформированную каплями в конусе с углом раствора  $\alpha \in [0, \pi]$ . Поскольку угол  $\alpha = \pi - \delta$  однозначно выражается через угол отклонения, то нет необходимости рассматривать целый ансамбль капель: достаточно лишь анализировать то, как одна капля отклоняет лучи.

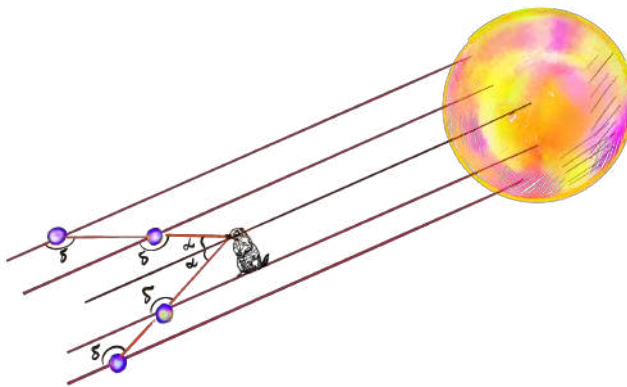


Рисунок 3: Сурок и Солнце. Акварель. 2026й год.

До конца задачи ~~осталось немного~~, всего 4 страницы рассматривайте только 1 и 2 отражения в капле (радуги первого и второго порядков). Кроме того, пока мы не будем обсуждать интенсивность лучей: сейчас мы рассматриваем только ответ на вопрос, освещена ли та или иная область.

Подробное рассмотрение явления удобно проводить на примере графика (рекомендуем вам нарисовать такой для воды). Существует область, в которую лучи не могут попасть вовсе: для привычной нам радуги с  $n = 1,33$  данная область называется полосой Александра. Обобщим понятие на произвольные показатели преломления. Далее будем называть полосой Александра ту область, в которую лучи не могут попадать в результате 1 или 2 отражений в капле (даже если её форма не совпадает с формой которую наблюдал Александр Афродисийский).

2. (1 балл) В какой диапазон углов  $\delta$  (от 0 до  $\pi$ ) не попадают лучи при  $n = 1,33$ ? Как этот диапазон может быть описан в терминах  $\alpha$ ? Ответ дайте в радианах. Сравните с известными вам фактами про радугу. Сравните ответ с известными вам фактами про полосу Александра (даже если вы эти факты не знали ранее, а если вас зовут Александр, то можете сравнить с какими-либо фактами из вашей жизни).

*В данном пункте проверяется только ответ, а не решение. Ответ необходимо дать в **радианах** с точностью до 4 значащих цифр. За этот пункт нельзя получить part!*

<sup>1</sup>Зачастую  $\delta > \pi/2$ , поэтому конус оказывается «вывернут наизнанку».

3. (1 балл) Найдите границы полосы Александра (в терминах  $\alpha$ ) для

- а)  $n = 1,2000$ ;
- б)  $n = 1,4000$ ;
- в)  $n = 1,6000$ .

Дайте численный ответ в **радианах**. В ответе дайте 4 значащие цифры после запятой. Нарисуйте график  $\delta(p)$  для каждого случая. Заштрихуйте неосвещённую область.

### Где максимум интенсивности?

Ранее мы рассматривали ответ только на вопрос, куда свет вообще может попадать. Теперь рассмотрим, где интенсивность света выше. Для начала разберёмся, какие прицельные параметры наиболее вероятны. Рассмотрим проекцию капли (рисунок 4).

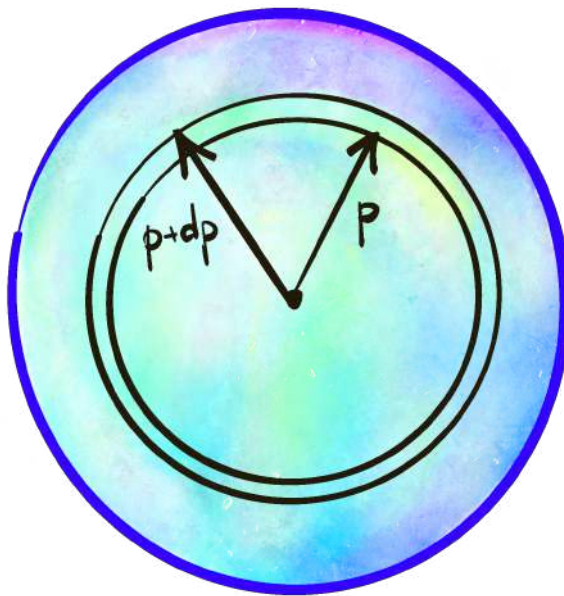


Рисунок 4: Проекция капли. Procreate. 2026

Пучок параллельных лучей падает во всевозможные точки данной капли с одной и той же вероятностью. Поэтому вероятность попасть в некоторую область равна отношению площади этой области к площади проекции. Поскольку задача сферически симметрична, будем рассматривать области в форме колечек радиуса  $p$  толщины  $\Delta p$ . Вероятность попасть в такое колечко равняется:

$$\mathbb{P}(p) = \frac{2\pi p \Delta p}{\pi} = 2p \Delta p.$$

Света Свет из этого конуса пойдёт в диапазон углов  $(\alpha(p); \alpha(p + \Delta p))$ . Чем меньше диапазон углов, тем выше плотность лучей. Таким образом, вклад в яркость радуги от данного небольшого участка будет:

$$B = B_0 \frac{\mathbb{P}(p)}{\alpha(p + dp) - \alpha(p)} = B_0 \frac{2p \Delta p}{\Delta \alpha} \sim 2B_0 p \left( \frac{d\alpha}{dp} \right)^{-1}.$$

Последнее равенство мы написали с точностью до некоторой константы. Поиск этой константы не рассматривается в рамках данной задачи.

Несложно заметить, что яркость становится крайне высокой в тот момент, когда  $\frac{d\alpha}{dp} = 0$ . Тем не менее, она не оказывается бесконечной по целому ряду причин: во-первых, солнце не точечное, из-за чего пучок лучей от него не является параллельным. Во-вторых, волновые явления «исправят» существование «бесконечной» яркости. Тем не менее, именно условие  $\frac{d\alpha}{dp} = 0$  и является причиной возникновения радуги, которую мы (и ~~сурок~~ Сурок) видим. Далее под «угловым размером радуги» будем подразумевать именно ту точку, в которой производная зануляется. Первичной и вторичной радугой будем называть случаи, когда луч света испытал одно или два отражения внутри капли.

4. (1 балл) Найдите угловой размер первичной и вторичной радуг для

- а)  $n = 1,2000$ ;
- б)  $n = 1,4000$ ;
- в)  $n = 1,6000$ .

Какие из них увидит Сурок, если солнце находится у него за спиной? В ответе дайте 4 значащие цифры после запятой. Дайте численный ответ в **радианах**.

Из-за наличия дисперсии (зависимости показателя преломления от длины волны света) максимум яркости разных цветов находится в немного разных точках.

5. (1 балл) Показатель преломления воды для зелёного цвета (500 нм) равен 1,33. Дисперсия показателя преломления  $\frac{dn}{d\lambda} \approx -3 \cdot 10^{-5} \text{ нм}^{-1}$ . Найдите положения максимумов яркости для синего  $\lambda = 400$  нм и красного цвета  $\lambda = 700$  нм. Дайте численный ответ в **радианах**.

*В данном пункте проверяется только ответ, а не решение. За этот пункт нельзя получить part!*

## Часть 2. Сурок–программист

«Фью-фью-фью» — подумал Сурок, когда понял, что аналитически найти зависимость яркости от угла довольно трудно. Причин для этого было предостаточно: во-первых, для одного и того же угла есть 2 возможных прицельных параметра; во-вторых, работать с чем-то вида  $\frac{1}{0}$  оказалось довольно неудобно; наконец, в-третьих, солнце — это не точка, поэтому надо ещё добавить усреднение по углам.

Связь амплитуд преломлённой и отражённой волн задаётся формулами Френеля<sup>2</sup>. Для  $s$  и  $p$  поляризаций коэффициенты отражения  $r$  и пропускания  $t$  (по амплитуде) могут быть записаны следующим образом:

$$\begin{aligned} r_s &= \frac{n_1 \cos \varphi_1 - n_2 \cos \varphi_2}{n_1 \cos \varphi_1 + n_2 \cos \varphi_2}, & t_s &= \frac{2n_1 \cos \varphi_1}{n_1 \cos \varphi_1 + n_2 \cos \varphi_2}, \\ r_p &= \frac{n_2 \cos \varphi_1 - n_1 \cos \varphi_2}{n_2 \cos \varphi_1 + n_1 \cos \varphi_2}, & t_p &= \frac{2n_1 \cos \varphi_1}{n_2 \cos \varphi_1 + n_1 \cos \varphi_2}; \end{aligned}$$

где  $n_1, n_2$  — показатели преломления сред,  $\varphi_1$  — угол падения,  $\varphi_2$  — угол преломления.

---

<sup>2</sup>Эта тема не входит в школьную программу, но всё, что от вас требуется это общее понимание об этих формулах, которое легко найти в интернете, например в [Википедии](#)

К счастью, у Сурка были навыки программирования, поэтому он решил найти решение численно. Для решения данного пункта вам предлагается **готовый код**, написанный лапками нашего травоядного. В нём необходимо ввести зависимость угла  $\alpha \in [0, \pi]$  от прицельного параметра  $p$  и посмотреть на радугу. Кроме того, вам необходимо посчитать коэффициенты прохождения света  $T$  по интенсивности для первичной и вторичной радуг.

Для начала мы рекомендуем получить картинку для обычной воды и убедиться, что результат совпадает с вашими ожиданиями.<sup>3</sup> Даже если ожидания и результаты не совпали, то всё равно попробуйте:

6. (1 балл) Для  $n = 1,2$  **сравните** яркость различных поляризаций.
7. (1 балл) Для показателя преломления  $n_{500} = 1,312$  при 500 нм и дисперсии  $\frac{dn}{d\lambda} = -3 \cdot 10^{-5} \text{ нм}^{-1}$  получите цветное изображение радуги. Объясните полученный результат.

### Часть 3. Морской Сурок

**Варкалюеъ:** Распогодилось. Выбравшись из промзоны Сурок оказался на берегу пруда, поверхность которого была зеркально гладкая. «Какая красота» — подумал наш экзистенциальный сурок и запечатлил этот момент у себя в скетчбуке (смотри рисунок 5). За спиной у него сияла звезда по имени Солнце на высоте  $\varphi = 30^\circ$  над горизонтом. Погода была ясная, на небе ни облачка. «Хорошо, что я не в МФЦ» — подумал Сурок. Поскольку пруд был недалеко от химзавода, то показатель преломления жидкости в нём отличался от стандартного для воды. Для бирюзового зелёного цвета (500 нм) равен  $n_{500}$ , дисперсия показателя преломления равна  $-3 \cdot 10^{-5} \text{ нм}^{-1}$ . Рассмотрите случаи  $n_{500} = 1,312$  и  $n_{500} = 1,2$ .

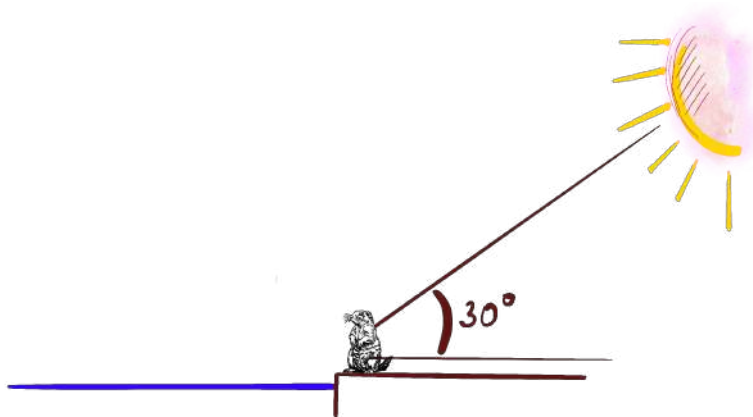


Рисунок 5: Зарисовка в скетчбуке Сурка. Автопортрет. Перо. 2026й год.

8. (0 баллов) Что видит персонаж?
9. (3 балла) Наш елэон зверюга решил искупаться и с головой опустил в озеро. Сурок смотрит наверх. Какая область освещенна? Где в этой области располагается солнце?

<sup>3</sup>Возможно, здесь есть смысл вспомнить, цитату Андрея Сергеевича Аршавина, что «ваши ожидания — это ваши проблемы», но мы не уверены, поэтому оформили эту мысль в виде сноски