**11.s07.e03**

# Hint 0

Не понимая как помочь Ам Няму, вы неожиданно для себя нашли tutorial к игре. Не испытывая особых надежд, вы всё же решили открыть его и полистать.

# Несколько важных идей

Как несложно заметить, данная задача посвящена баллистике. Обычно такие задачи решаются или алгебраическим, или векторным методами. Однако существует еще и третий способ, который сочетает в себе все эти идеи и порой он бывает удобнее первых двух. Метод этот — использование свойств кривых второго порядка, а именно параболы.

## Геометрические свойства параболы

Так как мы имеем дело с параболическими траекториями в параболической яме, нельзя обойтись без напоминания геометрических свойств параболы. Заметим, что у параболы довольно много определений равносильных друг между другом. Например в алгебре вы определяете параболу как график квадратичной функции вида $y = ax^2 + bx + c$, где $a, b, c$ — коэффициенты, $a \neq 0$ . Однако есть и другое определение, которое говорит, что парабола — это геометрическое место точек на плоскости, для которых расстояние до заданной точки, называемой фокусом параболы равно расстоянию до заданной прямой, называемой её директрисой (см. рисунок).

Эти определения равносильны друг другу и вы можете в этом самостоятельно убедиться. Для этого рассмотрите параболу, заданную в системе координат $(x,y)$ уравнением

$$4p(y - y_0) = (x - x_0)^2$$

и проверьте, что она может быть определена как ГМТ точек, равноудалённых от фокуса $F(x_0, y_0 + p)$ и директриссы $y = y_0 - p$.

Заметим также, что вершина параболы при этом есть $(x_0, y_0)$; радиус кривизны параболы в вершине равен $2p$, а кроме того имеет место оптическое свойство параболы: касательная к параболе в точке $X$ является биссектрисой между $XF$ и $XP$, где $P$ - проекция $X$ на директриссу. Последние два факта могут быть не такими очевидными, как первый, но всё же они достаточно общеизвестны и поэтому их доказательство мы оставим читателю.

Подведём краткий промежуточный итог.

**Идея 1.** Параболы бывает удобно рассматривать в терминах её фокусов и директрисы. Если вы знаете где проходит директриса параболы и где находится её фокус, то вы знаете про параболу всё.

**Идея 2.** Оптическое свойство параболы — касательная, проведённая к параболе является биссектрисой угла между фокальным радиусом: отрезком, соединяющим точку касания с фокусом параболы и перпендикуляром к директрисе.

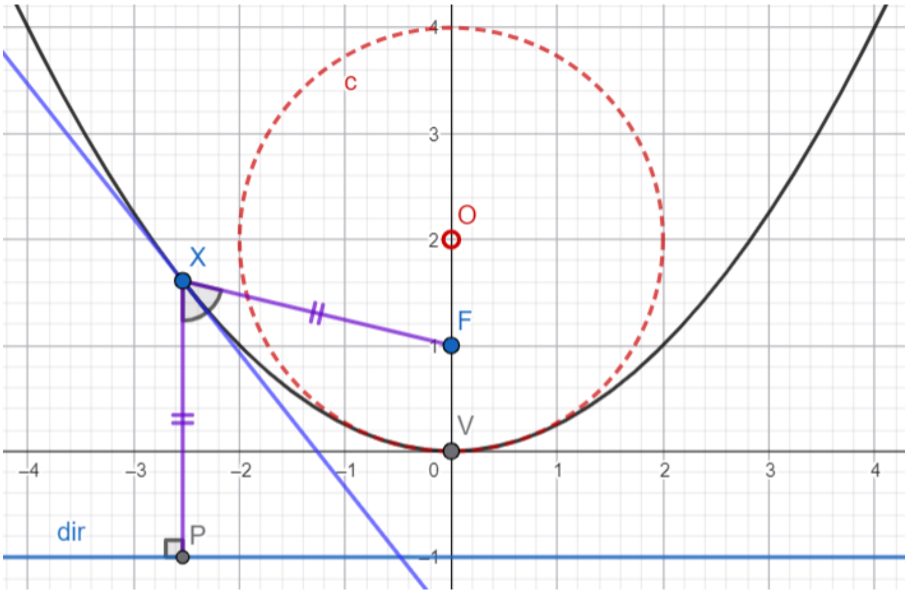


Рисунок 1: Иллюстрация основных свойств параболы. По осям отложены $(x - x_0)/p$, $(y - y_0)/p$.

## Геометрический смысл энергии

Рассмотрим процесс движения в гравитационном поле. В этом случае траектория движения тела будет — парабола, ветви которой будут направлены вниз, а полная механическая энергия материальной точки будет определяться выражением:

$$E = \frac{mv^2}{2} + mgy.$$

Рассмотрим вершину параболы $(x_0, y_0)$, в ней скорость тела направлена горизонтально и равна $v_x$, а ускорение — вертикально вниз и равно $g$. Тогда, вычисляя радиус кривизны, мы получаем

$$2p = R_{\text{кр}} = \frac{v_x^2}{g} \iff \frac{mv_x^2}{2} = mgp.$$

Мы видим, что кинетическая энергия в верхней точке равна потенциальной энергии тела, поднятого на высоту $p$. Но $p$ в то же время определяет расстояние от вершины параболы до её фокуса и директриссы, откуда получаем удивительный факт:

**Идея 3.** Полная энергия $E$ летящего тела равна потенциальной энергии этого тела на высоте директриссы его траектории.

Из этого следует, что если материальная точка движется по параболе и испытывает упругий удар, то поскольку её механическая энергия не изменяется, то директриса остаётся одной и той же. Более того, при необходимости легко рассчитать её высоту:

$$y_{dir} = y_{start} + \frac{v_0^2}{2g},$$

где $y_{start}$ — координата $y$, отвечающая началу движения, а $v_0$ — начальная скорость.

Отметим, что получить этот факт можно и без использования радиуса кривизны, достаточно явно выписать уравнения движения $(x(t),y(t))$ (удобнее всего отсчитывать время от вершины параболы), преобразовать в зависимость $y(x)$ и найти фокус.

Чтобы однозначно задать параболу, достаточно в дополнение к директриссе знать фокус. Если мячик находится в точке $X$ и имеет скорость $\vec{v}$, положение фокуса найти совсем легко из оптического свойства: нужно отразить перпендикуляр $XP$, опущенный на директриссу, относительно $\vec{v}$:

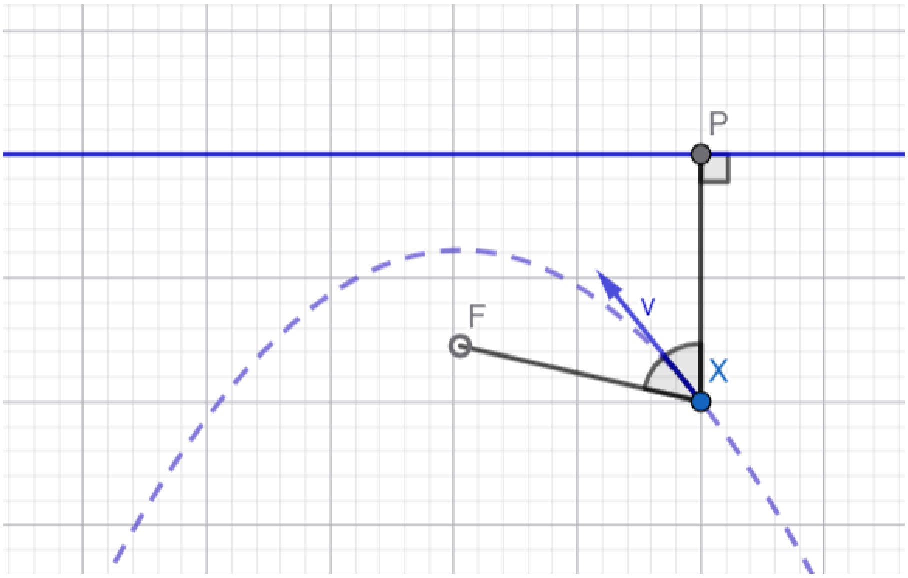


Рисунок 2: Отыскание фокуса по скорости в данной точке.

В завершении хотим вам предложить сделать полезное **упражнение**. Пусть небольшое тело бросают из точки $P$ со скоростью $v_0$, направленной под произвольным углом к горизонту. Найдите геометрическое место точек, которое образуют фокусы всех возможных парабол по которым может полететь тело.

Важно заметить, что любую задачу на баллистику можно решить каждым из вышеперечисленных методов. И задачу предложенную в этом Эпизоде тоже, но выбор метода — это вопрос удобства. По мнению Жюри метод рассмотрения фокусов и директрис может быть вам полезен, но мы на нём ни в коем случае не настаиваем и если вам использовать данный подход некомфортно, то просто не делайте это.