Кубок ЛФИ

11.s07.e02

Hint 2

ВАЖНО! Задача является одновременно и хинтом, и альтернативой к основной задаче. Три важных момента:

1. Вы можете продолжать присылать решение основной задачи.

2. В любой момент до финального дедлайна вы можете перейти на решение *альтернативной задачи*. Если вы это делаете, то в самом начале решения напишите: *Я перехожу на решение альтернативной задачи!* В этом случае Штрафной коэффициент за альтернативную задачу будет равен

$$0{,}7 \cdot \sum_i \frac{k_i \cdot p_i}{10},$$

где p_i — балл за пункт, а k_i — штрафной коэффициент за соответствующий пункт на момент перехода на Альтернативную задачу. Другими словами, максимальный балл за альтернативную задачу равен максимальному баллу, который вы можете получить в момент перехода на нее, умноженному на 0,7. Заметим, что штрафной коэффициент не может быть меньше 0,1. Также напоминаем, что **решения основной задачи с этого момента не проверяются**, а все баллы за основную задачу **обнуляются** Будьте внимательными!

3. Задача состоит из нескольких пунктов. Штрафной множитель, заработанный **до этого** применяется ко всем пунктам. В дальнейшем каждый пункт оценивается как отдельная задача. Если вы присылаете решение без какого-либо пункта, то его решение считается Incorrect. Более подробно о начислении баллов для составных задач смотрите в Правилах проведения Кубка.

Альтернативная задача

«Отчаяние» — пожалуй, именно этим словом можно было описать состояние Мстислава Лося, который уже несколько дней бился над решением, казалось бы, известных ему еще с лицейской скамьи вопросов.

«Это же прописные истины, не может быть такого, что они не верны», — всё время повторял взъерошенный и невыспавшийся инженер с пятидневной щетиной на лице, продолжающий ходить из угла в угол своей мастерской в поиске ошибки в своих рассуждениях. Он не заметил, как наступил рассвет, а вместе с ним и полдень, который был ознаменован боем настенных часов. Удары небольших механизированных молоточков по миниатюрному гонгу вывели Мстислава из состояния персеверации.

Он перевёл взгляд с часов на старую книжную полку в самом дальнем углу своей мастерской, где хранились его ещё лицейские конспекты вперемешку с тетрадями университетских времён. Словно в состоянии лунатизма (что является лишь небольшим преувеличением, поскольку Мстислав Лось не спал уже несколько дней) он подошёл к полке и стал листать свои старые записи.

Из записей Мстислава Лося

Тетрадь 1

Определение Дипольным моментом электрически нейтральной системы называется величина равная:

$$\vec{p} = \int \rho \vec{r} dV,$$

где $\vec{r}$ — радиус вектор элемента объема dV, а ρ — плотность заряда в этом объеме.

При этом при решении задач мы чаще всего будем использовать другое определение дипольного момента и представлять систему зарядов в виде двух точечных зарядов q и $-q$ на расстоянии l друг от друга, а величину дипольного момента будем записывать как:

$$\vec{p} = q\vec{l},$$

где вектор $\vec{l}$ направлен от отрицательного заряда к положительному.

Упражнение. Докажите, что напряженность электрического поля диполя равна:

$$\vec{E} = \frac{3k(\vec{p}, \vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{k\vec{p}}{r^3}$$

Данный результат считается общеизвестным и его можно использовать без доказательства. Отправлять на проверку ваши доказательства не нужно.

Задача 1

Проводящий шар с нулевым суммарным зарядом радиуса R помещён в однородное электрическое поле $\vec{E}_0$. Представляя шар как суперпозицию двух равномерно заряженных шаров радиуса R с плотностями заряда ρ и $-\rho$, найдите:

1. *(1 балл)* На какое расстояние должен сместиться один шар относительно другого, чтобы они оказались в положении равновесия.

2. *(0,5 балла)* Чему равна величина дипольного момента такой системы.

3. *(0,5 балла)* Считая, что объемная плотность заряда ρ стремится к бесконечности, а смещение одного шара относительно другого по этой причине сколь угодно мало, найдите, как зависит поверхностная плотность заряда на проводящем шаре от угла θ между направлением вектора напряженности электрического поля $\vec{E}_0$ и радиус вектором $\vec{r}$, проведенном к элементарной площадке dS на поверхности шара.

Тетрадь 2

Задача 2

В вершинах Кубика находятся одинаковые точечные заряды q.

4. *(0,5 балла)* Чему равен поток, создаваемый одним зарядом через весь Куб?

5. *(0,5 балла)* Чему равен суммарный заряд внутри Кубика?

Упражнение. Попробуйте вывести формулу для телесного угла при вершине прямого кругового конуса с углом раствора α

$$\Omega = 2\pi\left(1 - \cos\frac{\alpha}{2}\right)$$

Данный результат считается общеизвестным и его можно использовать без доказательства. Отправлять на проверку ваши доказательства не нужно.

Задача 3

Конус с углом раствора при вершине α равномерно заряжен по объему. Высота конуса H.

6. *(1,5 балла)* Найдите чему равно значение электростатического поля в вершине конуса?

Задача 4

В точках A и B находятся точечные заряды $+q$ и $-q$. Силовая линия, выходящая из A под углом α к AB пересекает плоскость, проходящую через середину отрезка AB, перпендикулярно к нему, под прямым углом в точке P.

7. *(1,5 балла)*Докажите, что $\sin\alpha/2 = \sqrt{2}\sin\frac{1}{2}\angle PAB$.

Тетрадь 3

Задача 5

Точечный заряд находится над проводящей плоскостью в точке A. Расстояние до плоскости $AB = H$.

8. *(0,5 балла)* Постройте изображение заряда и найдите силу их взаимодействия.

9. *(1 балл)* Найдите чем равен суммарный заряд части проводящей плоскости в виде круга с центром в точке B и радиуса R.

Задача 6

Проводящий шар радиуса R находится в поле точечного заряда q, который находится на расстоянии $2R$ от центра шара.

10. *(1 балл)* Какой минимальный заряд надо сообщить шару, чтобы на его поверхности не было точек, где будет отрицательная плотность заряда?

11. *(1 балл)* Какой минимальный заряд нужно поместить на проводящий шар чтобы ни одна силовая линия от заряда q не дошла до шара?

12. *(0,5 балла)* Какие в этом случае углы будут образовывать силовые линии, вышедшие из заряда q, с осью x на бесконечности (см. условие основной задачи)?