Кубок VI ЛФИ

11.s06.e05

Hint 2

ВАЖНО! Задача является одновременно и хинтом, и альтернативой к основной задаче. Три важных момента:

1. Вы можете продолжать присылать решение основной задачи.
2. В любой момент до финального дедлайна вы можете перейти на решение *альтернативной задачи*. Если вы это делаете, то в самом начале решения напишите: *Я перехожу на решение альтернативной задачи!* В этом случае Штрафной коэффициент за альтернативную задачу будет равен

$$0{,}7 \cdot \sum_i \frac{k_i \cdot p_i}{10},$$

где p_i — балл за пункт, а k_i — штрафной коэффициент за соответствующий пункт на момент перехода на Альтернативную задачу. Другими словами, максимальный балл за альтернативную задачу равен максимальному баллу, который вы можете получить в момент перехода на нее, умноженному на 0,7. Заметим, что штрафной коэффициент не может быть меньше 0,1. Также напоминаем, что решения основной задачи с этого момента не проверяются. Будьте внимательными!

3. Задача состоит из нескольких пунктов. Штрафной множитель, заработанный **до этого** применяется ко всем пунктам. В дальнейшем каждый пункт оценивается как отдельная задача. Если вы присылаете решение без какого-либо пункта, то его решение считается Incorrect. Более подробно о начислении баллов для составных задач смотрите в Правилах проведения Кубка.

Содержание

Альтернативная задача

1 Кинематика СТО

1.1. Два события происходят в лабораторной системе отсчета в одном и том же месте, но отстоят во времени на 3 сек.

   а) *(0,2 балла)* Чему равно расстояние в пространстве между этими событиями в системе отсчета ракеты, если промежуток времени между событиями равен в ней 5 сек.

   б) *(0,2 балла)* Чему равна скорость v_r ракеты относительно лабораторной системы отсчета.

1.2. *(0,4 балла)* Космический корабль движется с постоянной скоростью $V = (24/25)c$ по направлению к центру Земли. Какое расстояние в системе отсчета, связанной с Землей, пройдет корабль за промежуток времени $\Delta t' = 7$ с, отсчитанный по корабельным часам? Вращение Земли и ее орбитальное движение не учитывать.

1.3. *(0,6 балла)* Космический корабль летит со скоростью $V = 0{,}6\ c$ от одного космического маяка к другому. В тот момент, когда он находится посередине между маяками, каждый из них испускает в направлении корабля световой импульс. Найти, какой промежуток времени пройдет на корабле между моментами регистрации этих импульсов. Расстояние между маяками свет проходит за 2 месяца.

1.4. *(0,8 балла)* Два звездолета с выключенными двигателями движутся навстречу друг другу. На одном звездолете на носу и на корме одновременно зажигаются каждую секунду сигнальные огни. На встречном звездолете наблюдают каждые 0,5 секунды две вспышки с интервалом времени $\tau' = 1$ мкс. Найти длину l_0 первого звездолета и скорость их сближения v.

Второй закон Ньютона в СТО имеет вид

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}, \quad \text{где} \quad \mathbf{p} = \gamma m v.$$

1.5. *(0,8 балла)* Частица массой m начинает двигаться под действием постоянной по величине и направлению силы F. Определите, через какое время по собственным часам частица достигнет скорости $v = 0{,}8c$. Вам может пригодиться следующий интеграл:

$$\int\limits_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x_1}{1-x_1}\frac{1-x_0}{1+x_0}.$$

2 Классическая черная дыра

При продолжительном наблюдении за положением звезды около центра галактики было выяснено, что она совершает периодическое движение по окружности в поле тяжести некоторого массивного объекта. Считайте известным, что расстояние от точки наблюдения до центра галактики равно $\approx 26 \cdot 10^3$ световых лет, период обращения звезды по ее траектории равен ≈ 16 лет, радиус окружности траектории звезды из точки наблюдения виден под углом $88 \cdot 10^{-3}$ угловых секунд, а плоскость, в которой происходит движение звезды, перпендикулярна направлению наблюдения.

2.1. *(1 балл)* Определите массу притягивающего звезду объекта.

2.2. *(1 балл)* Считая притягивающий звезду объект сферически симметричным, а его размер достаточно малым, определите границы области вокруг такого объекта из которой ни один сигнал не может достичь удалённого наблюдателя.

3 ОТО

Лучи света в метрике Шварцшильда

Рассмотрим, как движется свет в метрике Шварцшильда

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r_g}{r}} - r^2 d\varphi^2. \tag{1}$$

Вдали от гравитирующих тел свет распространяется по прямой. Расстояние от этой прямой (в пространстве (x, y, z)) до начала координат называется *прицельным параметром* ρ. Так как масса фотона равна нулю, то вдали от гравитирующих тел его энергия равна $E = |\mathbf{p}|$, а момент импульса равен $J = |\mathbf{p}|\rho$.

Напомним, что кривая, по которой движется свет, — это светоподобная геодезическая, т. е. в каждой ее точке

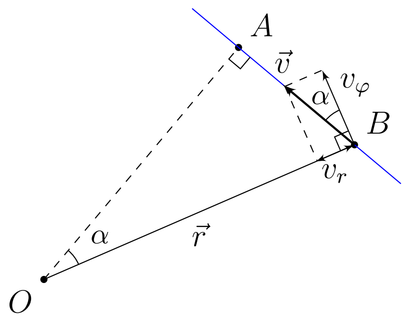
$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r_g}{r}} - r^2 d\varphi^2 = 0. \tag{2}$$

Из-за того что выполнено это уравнение, светоподобная геодезическая зависит только от одного параметра ρ вместо двух параметров E и J. Чтобы получить $t(r, \rho)$, $\varphi(r, \rho)$ нужно еще одно уравнение. Возьмем в качестве него отношение полученных в основной задаче законов сохранения:

$$\rho = \frac{J}{E} = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} r^2 \frac{d\varphi}{dt} = \mathrm{const}\,. \tag{3}$$

Видно, что при $r \gg r_g$ это переходит в rv_φ, что совпадает с расстоянием, описанным выше:

$$OA = r\cos\alpha = r\frac{v_\varphi}{|\vec{v}|} = r\frac{v_\varphi}{c} = rv_\varphi.$$



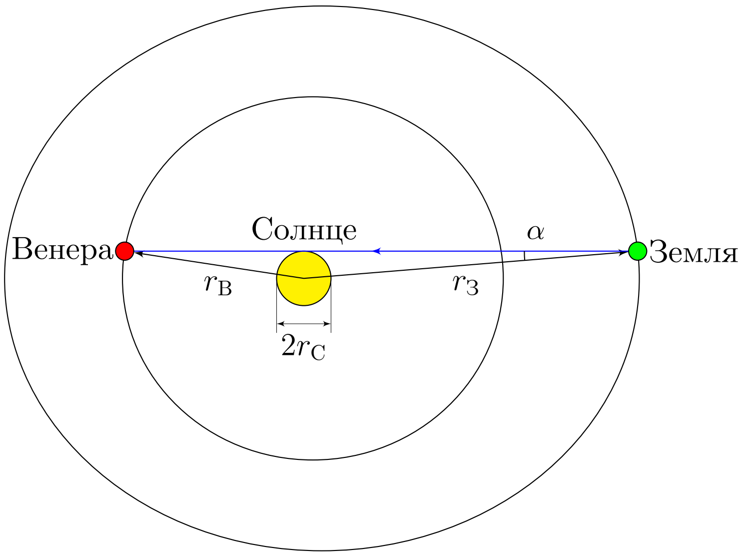
Задержка Шапиро

Одно из следствий того, что свет распространяется в метрике 1, заключается в том, что скорость его распространения уменьшается, а время соответственно увеличивается. Этот эффект был предсказан Ирвином Шапиро в 1964 году, а затем экспериментально проверен в 1966-1967 годах. В этой части вам предлагается воспроизвести вычисление Шапиро.

Рассмотрим луч света, испущенный с Земли и достигший Венеры. Для простоты будем считать, что траектория луча — прямая линия, т. е. что уравнение (3) имеет вид

$$\rho = r\frac{v_\varphi}{|\vec{v}|} = r\frac{r d\varphi/dt}{\sqrt{(dr/dt)^2 + r^2(d\varphi/dt)^2}} = r\frac{r d\varphi}{\sqrt{dr^2 + r^2 d\varphi^2}} = r\sin\alpha = \mathrm{const}\,.$$

Чтобы эффект был максимальным, рассмотрим траекторию, которая касается Солнца (см. рисунок ниже).



Пусть при таком расположении планет расстояние от Солнца до Земли равно $r_{\text{З}}$, а до Венеры — $r_{\text{В}}$. Радиус Солнца равен $r_{\text{С}}$.

3.1. *(0,5 балла)* Выразите dt для такой траектории через dr, r, $r_{\text{С}}$ и радиус Шварцшильда r_g.

3.2. *(0,5 балла)* Разложите полученное выражение для dt до первого порядка малости по r_g/r.

3.3. *(0,5 балла)*Используя разложение, полученное в предыдущем пункте, найдите время t_{gr}, которое требуется лучу, чтобы достичь Венеры. Вам могут пригодиться следующие интегралы:

$$\int\limits_{x_0}^{x_1}\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\frac{x_1+\sqrt{x_1^2-a^2}}{x_0+\sqrt{x_0^2-a^2}}, \qquad \int\limits_{x_0}^{x_1}\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{\sqrt{x_1^2-a^2}}{a^2x_1} - \frac{\sqrt{x_0^2-a^2}}{a^2x_0}.$$

3.4. *(0,5 балла)* Обозначим предсказание Ньютоновской гравитации для времени, которое требуется лучу, чтобы достигнуть Венеры как $t_{\text{Н}}$. Считая, что $r_{\text{С}} = 7\cdot 10^5$ км, $r_{\text{З}} = 1{,}5\cdot 10^8$ км, $r_{\text{В}} = 1{,}1\cdot 10^8$ км, радиус Шварцшильда для Солнца равен $r_g = 3$ км вычислите $t_{\text{gr}} - t_{\text{Н}}$.

Искривление лучей света черной дырой

Из уравнений (2) и (3) можно получить уравнение светоподобной геодезической $t(r,\rho)$, $\varphi(r,\rho)$:

$$t(r,\rho) - t_0 = \pm \int\limits_{r_0}^{r} \frac{dr}{\rho\left(1-\frac{r_g}{r}\right)\sqrt{f_L(r,\rho)}}, \qquad \varphi(r,\rho) - \varphi_0 = \pm \int\limits_{r_0}^{r} \frac{dr}{r^2\sqrt{f_L(r,\rho)}}, \tag{4}$$

3.5. *(0,5 балла)* Найдите $f_L(r,\rho)$.

3.6. *(0,5 балла)* Постройте качественный график зависимости $U(\rho,r^{-1}) = \rho^{-2} - f_L(r,\rho)$ от r^{-1} в области $r^{-1} \in [0,r_g^{-1}]$ при некотором фиксированном ρ. На графике должны быть показаны все точки минимума и максимума функции $U(\rho,r^{-1})$.

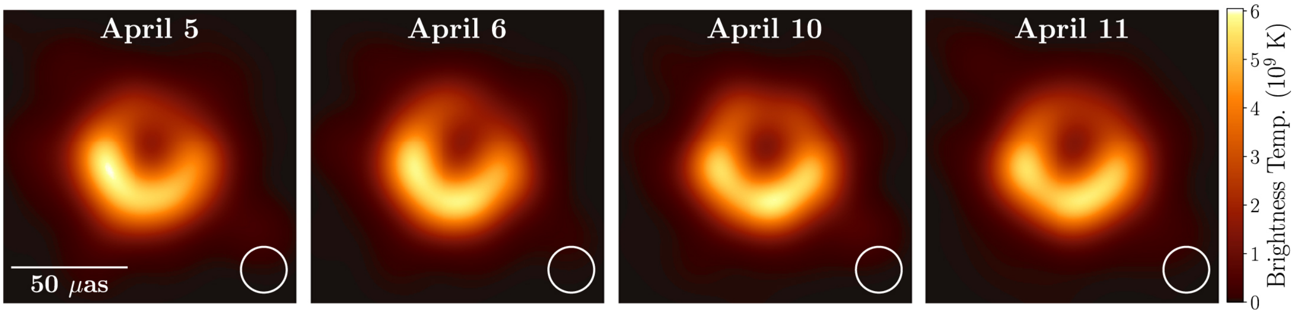
Область допустимых r ограничена тем, что подкоренные выражения в (4) неотрицательны. Это означает, что $U(\rho,r^{-1}) \leqslant \rho^{-2}$. Из построенного в пункте 3.6 графика видно, что при разных значениях параметра ρ есть несколько типов светоподобных геодезических:

- При $\rho < \rho_{\min}$ луч света попадает внутрь черной дыры.
- При $\rho > \rho_{\min}$ есть два типа геодезических. Один из них соответствует тому, что луч света, пришедший из бесконечности, приближается к черной дыре на некоторое минимальное расстояние $r_{\min}(\rho)$, а затем вновь уходит на бесконечность.

3.7. *(0,5 балла)* Найдите $\rho_{\min}/r_g$ с точностью до 0,01.

3.8. *(0,5 балла)* Найдите минимальное (среди всех $r_{\min}(\rho)$) расстояние $r_{\min}$, на которое светоподобная геодезическая может приблизиться к черной дыре, не попав внутрь, с точностью до $0{,}01r_g$.

В 2019 году участники коллаборации «телескоп горизонта событий» опубликовали изображение тени сверхмассивной черной дыры в центре галактики M87:



Будем считать, что диаметр яркого кольца на этих изображениях равен $2\rho_{\min}$. Диаметр кольца удобно вычислять как

$$d = \frac{d_{\text{out}} + d_{\text{in}}}{2},$$

где d_{out} и d_{in} — внутренний и внешний радиусы кольца соответственно. Считайте, что расстояние до этой черной дыры равно 16,4 млн парсек.

3.9. *(0,5 балла)* Используя изображение выше найдите d_{out}. Выразите ответ к километрах.

3.10. *(0,5 балла)* Используя изображение выше найдите d_{in}. Выразите ответ к километрах.

3.11. *(0 баллов)* Используя полученные результаты и выражение для $\rho_{\min}$ (см. 3.7), найдите r_g для сверхмассивной черной дыры в центре галактики $M87$. Выразите ответ к километрах.

3.12. *(0 баллов)* Используя полученное в предыдущем пункте выражение найдите массу этой черной дыры. Выразите ее в массах Солнца.