Кубок VI ЛФИ

11.s06.e03

Hint 2

ВАЖНО! Задача является одновременно и хинтом, и альтернативой к основной задаче. Три важных момента:

1. Вы можете продолжать присылать решение основной задачи.

2. В любой момент до финального дедлайна вы можете перейти на решение *альтернативной задачи*. Если вы это делаете, то в самом начале решения напишите: *Я перехожу на решение альтернативной задачи!* В этом случае Штрафной коэффициент за альтернативную задачу будет равен

$$0{,}7 \cdot \sum_i \frac{k_i \cdot p_i}{10},$$

где p_i — балл за пункт, а k_i — штрафной коэффициент за соответствующий пункт на момент перехода на Альтернативную задачу. Другими словами, максимальный балл за альтернативную задачу равен максимальному баллу, который вы можете получить в момент перехода на нее, умноженному на 0,7. Заметим, что штрафной коэффициент не может быть меньше 0,1. Также напоминаем, что решения основной задачи с этого момента не проверяются. Будьте внимательными!

3. Задача состоит из нескольких пунктов. Штрафной множитель, заработанный **до этого** применяется ко всем пунктам. В дальнейшем каждый пункт оценивается как отдельная задача. Если вы присылаете решение без какого-либо пункта, то его решение считается Incorrect. Более подробно о начислении баллов для составных задач смотрите в Правилах проведения Кубка. **С момента перехода на альтернативную подборку возможности вернуться к решению основной задачи нет.** Также, после перехода на альтернативную задачу **баллы за основную задачу обнуляются**.

Альтернативная задача

Казалось, что это место было создано для Скрытого. Он достал из своей походной сумки блестящую флягу, сделал небольшой глоток и почувствовал терпкий и приятный вкус во рту. Вечерний бриз касался лица Скрытого, а тишина, казалось, легла на этот Город убаюкивающим куполом.

Откинув капюшон только что купленного балахона, он шел по пустынным улицам, жалея, что вокруг не было привычной для него толпы людей, в которой всегда можно легко раствориться. Скрытый точно знал сколько времени прошло с момента его прибытия в Город. Он откинул крышку брегетов, чтобы убедиться, что он точно будет вовремя в назначенном месте. Часы были самой новой модели со встроенным компасом (а еще барометром и множеством других приборов).

Сверив направление, он двинулся в сторону проспекта и увидел высокое красивое здание, ионические колонны которого подпирали тесовую крышу с интересным барельефом наверху. Скрытый подошел к тяжелой двери и с некоторым усилием толкнул ее, чтобы войти внутрь.

Здесь было на удивление тепло, хотя казалось, что каменные стены должны давать прохладу. Скрытый прошел в центр большого зала, вдоль левой стены которого были высокие шкафы, уходящие под потолок, заполненные книгами в зеленых переплетах, украшенных золотым тиснением, а справа висели красивые гобелены с изображением спящих львов, пасущихся быков и парящих в небе птиц. Скрытый улыбнулся, увидев в глубине комнаты зеркало, с которыми у него были всегда отличные отношения.

Тяжелая дверь позади него захлопнулась с гулким стуком, нарушив тишину спящего Города. Скрытый неспеша обернулся: перед ним стояла женщина с львиной осанкой и орлиным профилем. Её немигающие глаза, лишённые ресниц, пронзительно смотрели на него. На левой руке женщины дремал лысый кот, которого она рассеяно поглаживала тонкими пальцами.

– Останешься здесь и никогда больше не скроешься. Ответишь верно и получишь возможность уйти – произнесла она.

Загадка 1

Рассмотрим распространение света в плоскости (x,y) в среде с показателем преломления $n(x)$. Оптический путь для такого показателя преломления имеет вид

$$s = \int_{x_A}^{x_B} n(x)\sqrt{1 + \left(\frac{dy(x)}{dx}\right)^2}\, dx. \tag{1}$$

Напомним, что оптический путь определен для любой функции $y(x)$.

У этого оптического пути есть две симметрии. Под симметрией мы имеем в виду некоторое преобразование функции $y(x)$[1], которое не меняет s. Симметрии бывают дискретные и непрерывные. Непрерывные симметрии имеют непрерывные параметры, например если система симметрична относительно поворотов, то таким параметром является угол поворота. Примером дискретной симметрии может служить центральная симметрия.

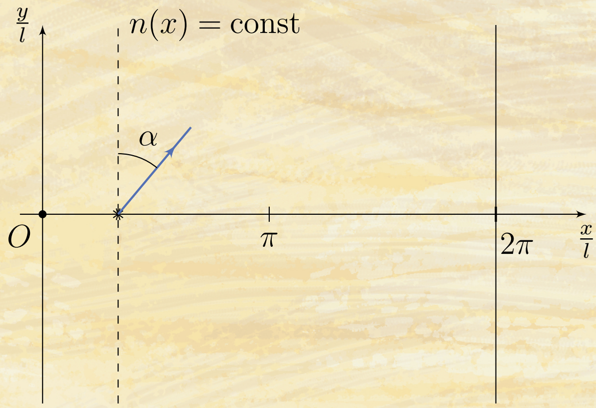
[1]Примеры преобразований функции $y(x)$: $y(x) \to (y(x))^2$, $y(x) \to y(-x) + 3x^3$. Можно убедиться, что эти преобразования не являются симметриями (1).

1. *(0 баллов)* Найдите непрерывную симметрию оптического пути (1). К каким свойствам траекторий приводит наличие этой симметрии?
2. *(0 баллов)* Найдите дискретную симметрию оптического пути (1). Докажите с помощью этой симметрии, что траектория луча, испущенного параллельно оси x — это прямая линия.

Пусть теперь показатель преломления имеет вид

$$n(x) = n_0 \left(1 - \frac{1}{2}\cos\left(\frac{x}{l}\right)\right),$$

а луч распространяется в области $x \in [0, 2\pi]$.



Пусть в точке S с координатами $(\pi l/3{,}0)$ в системе координат $(x{,}y)$ находится точечный источник света. Рассмотрим луч, испущенный из этой точки под углом α к оси y.

3. *(6 баллов)* Найдите максимальное значение x/l для траектории этого луча.

Загадка 2

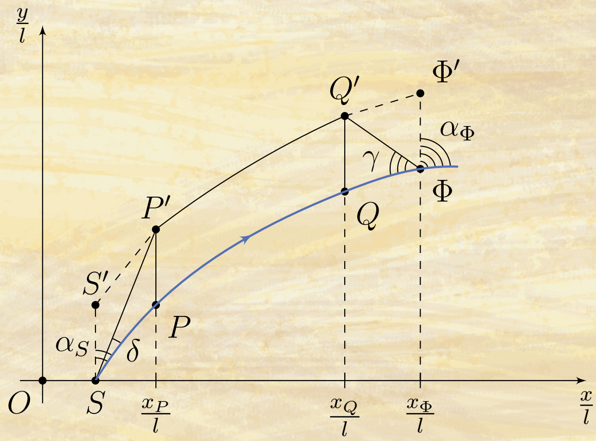
Среда уже не та и теперь имеет вид

$$n(x{,}y) = m(x)e^{-ky}.$$

Мы все еще рассматриваем траекторию луча, испущенного из точки S под углом α_S к оси y. Пусть эта траектория проходит через точку Φ, причем в этой точке угол между касательной к траектории и осью y равен α_Φ.

Рассмотрим кривую $S'P'Q'\Phi'$, полученную трансляцией траектории $SPQ\Phi$ на λ, т. е. $SS' = PP' = QQ' = \Phi\Phi' = \lambda$ (см. рисунок ниже). Выберем параметр λ малым по сравнению с $SP\,Q\Phi$, тогда углы δ и γ будут малы. Возьмем точки P и S такими, чтобы расстояния $|x_p - x_s|$ и $|x_Q - x_\Phi|$ были малы по сравнению с длиной траектории.

1. *(0,5 балла)* Выразите оптический путь на $s_{SP'}$ через оптический путь s_{SP}, углы δ, α_S, параметр λ, и функцию $n(x,y)$.
2. *(0,5 балла)* Разложите $s_{SP'}$ до первого порядка малости (см. нулевой хинт).
3. *(0,5 балла)* Выразите оптический путь на $s_{Q\Phi}$ через оптический путь $s_{Q'\Phi}$, углы γ, α_Φ, параметр λ, и функцию $n(x,y)$.
4. *(0,5 балла)* Разложите $s_{Q\Phi}$ до первого порядка малости.



5. *(1 балл)* Выразите оптический путь $s_{P'Q'}$ через оптический путь s_{PQ}, параметры λ и k.

6. *(0,5 балла)* Разложите полученное выражение для $s_{P'Q'}$ до первого порядка по λ.

7. *(0,5 балл)* Из условия равенства оптических путей $s_{SPQ\Phi}$, $s_{SP'Q'\Phi}$ в первом порядке малости получите выражение для s_{PQ} через $n(x,y)$, k, α_S и α_Φ.

Так как P и Q близки к S и Φ, оптический путь s_{PQ} в нулевом порядке равен $s_{SPQ\Phi}$.

Загадка 3

Рассмотрим среду с показателем преломления

$$n(x,y) = \frac{x}{(x^2+y^2)^2}. \qquad (2)$$

Оптический путь для такой среды имеет вид

$$s = \int \frac{x}{(x^2+y^2)^2}\sqrt{dx^2+dy^2}.$$

Можно заметить, что существует замена координат $x'(x,y)$, $y'(x,y)$, в которой этот оптический путь имеет такой же вид, как (1):

$$x'(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}, \quad y'(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}.$$

Можно показать, что замена координат $(x,y) \to (x',y')$ сохраняет углы. Чтобы это показать, рассмотрим маленький треугольник в плоскости (x,y). При таком преобразовании в первом приближении он перейдет в маленький треугольник в плоскости (x',y'). Чтобы показать, что замена сохраняет углы, покажем, что эти треугольники подобны. Для этого найдем отношение длин их сторон. Длина любого маленького отрезка в плоскости (x,y) равна $dl_{(x,y)} = \sqrt{dx^2+dy^2}$, а в плоскости (x',y') она равна[2] $dl_{(x',y')} = \sqrt{(dx'(x,y))^2+(dy'(x,y))^2}$. Можно показать, что $dl_{(x',y')} = f(x,y)dl_{x,y}$. Отсюда следует подобие треугольников и сохранение углов.

1. *(0 баллов)* Найдите $f(x,y)$.

[2] $dx'(x,y)$ означает $(x'(x+dx,y+dy)-x'(x,y))_1$ в обозначениях нулевого хинта.

В таких координатах оптический путь имеет вид

$$s = \int m(x')\sqrt{dx'^2 + dy'^2}.$$

2. *(0 баллов)* Найдите $m(x')$.

Такой вид оптического пути означает, что задача о распространении луча в среде с показателем преломления (2) эквивалентна задаче о распространении луча в стопе пластин с показателем преломления $m(x')$.