

# Кубок ЛФИ

11.s05.e05

*Между стимулом и нашей реакцией на него всегда есть время.  
Виктор Франкл*

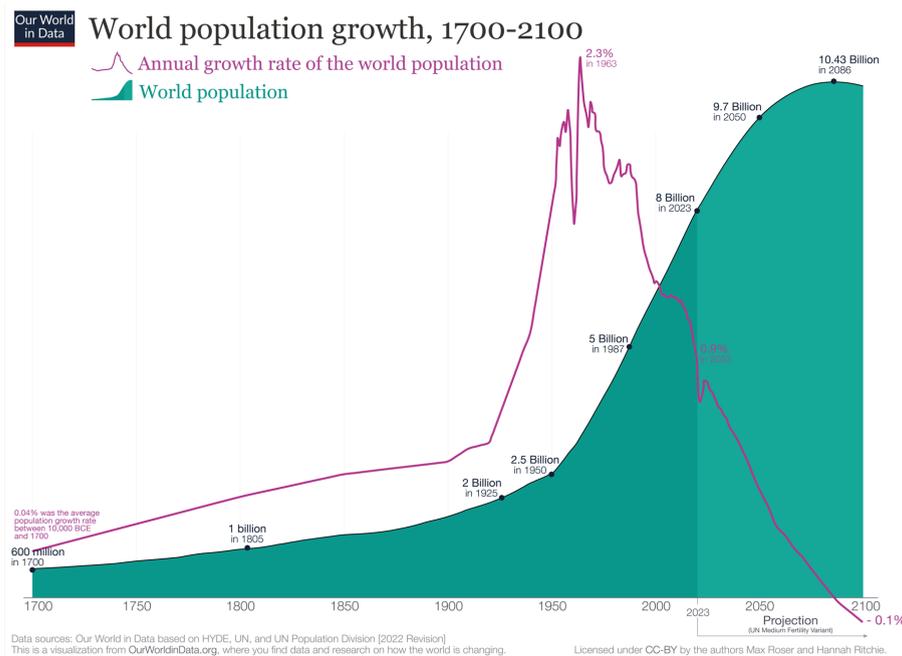
## Синтез

Среди нескольких старых книг на столе кабинета лежала папка с пометкой «Разработки Ганса Зингера».

Сильный порыв ветра в незакрытое окно обсерватории перевернул титульную страницу...

## Часть 1. Ядерные реакции (1,4 балла)

Согласно общедоступным [данным](#) в 20 веке начался активный рост населенности нашей планеты.



- (0 баллов) По графику определите, в каком году была пиковая скорость роста населения, т. е. процент прироста населения за год был максимален, и чему она равнялась в процентах.
- (0,2 балла) Считая, что с 2023 года скорость роста населения будет равна пиковой скорости роста в 20 веке, определите, через сколько лет на каждом квадратном метре суши будет стоять один человек. Считайте, что радиус Земли 6400 км, а доля суши равна 1/3.

В связи с быстрым ростом населения земного шара так же быстро растет и энергопотребление. На сегодняшний день человечество потребляет примерно  $Q = 10^{21}$  Дж в год.

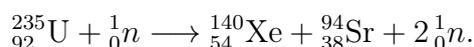
Возобновляемые источники энергии (ветро, гидро, солнечная энергетика и так далее) способны обеспечить до  $3Q$  в год, но, к сожалению, они не решают энергетические проблемы. Полученная с их помощью энергия оказывается достаточно дорогой и требует дополнительных условий (наличие ветра, большого количества солнечных дней в году и т. д.). Мощность, генерируемая этими источниками, очень сильно меняется во времени (например, ночью солнечная панель не вырабатывает энергию), что требует создания огромных дорогостоящих хранилищ энергии.

Исторически человечество научилось очень активно использовать природные ископаемые: нефть, уголь, газ и т. д. К сожалению, их запасы ограничены и неравномерно распределены по планете. Например, запасы нефти порядка  $15Q$ , угля —  $150Q$ . Кроме того, сжигание углеводородов ведет к выбросу парниковых газов и влияет на климат.

Помимо этого, химические источники энергии обладают низкой энергоэффективностью.

3. (0,2 балла) Оцените **энергоэффективность** сжигания химического топлива, т. е. количество энергии (в эВ) на один нуклон, выделяющееся при сгорании одного килограмма угля  $^{12}\text{C}$ . Считайте, что его удельная теплота сгорания  $31 \text{ МДж/кг}$ .

По этим причинам человечество ищет альтернативные источники энергии. В ходе исследований по ядерной физике было установлено, что ядра одних элементов могут превращаться в ядра других. Например:



4. (0,2 балла) Используя понятие дефекта масс, оцените энергоэффективность каждой реакции.
5. (0 баллов) На сколько порядков энергоэффективность ядерного топлива больше энергоэффективности химического?

В ходе реакций деления часто образуются нестабильные изотопы, в результате распада которых происходит цепочка ядерных превращений.

6. (0,8 баллов) Рассмотрим возможные цепочки распадов ядра  $^{235}_{92}\text{U}$ , в конце которых образовалось ядро  $^{207}_{82}\text{Pb}$ . Будем считать, что для тяжелых ядер возможны только три типа реакций: альфа распад, бета-минус распад и протонная эмиссия. Считая, что их вероятности относятся как  $20 : 10 : 1$  соответственно, определите наиболее вероятный набор продуктов распада.

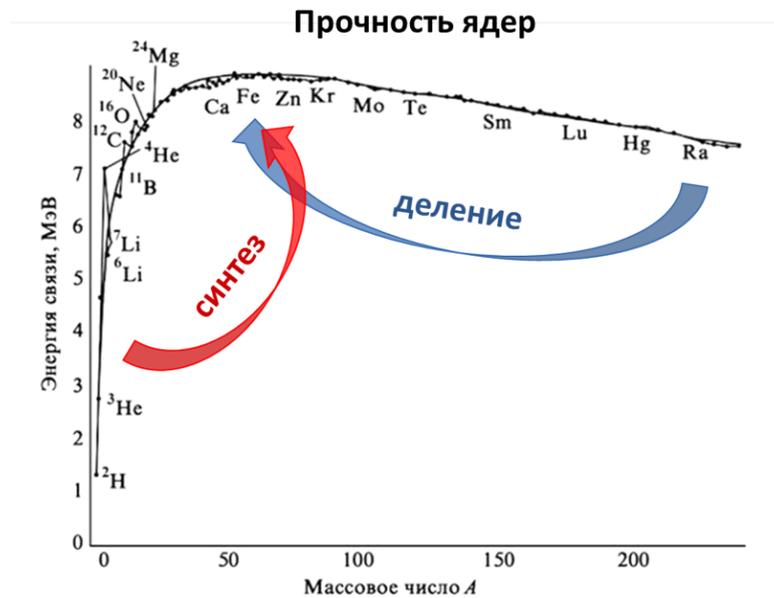
**Замечание.** В реальности протонная эмиссия еще на порядок менее вероятна и происходит с искусственно созданными изотопами химических элементов.

Из всего вышесказанного следует, что ядерная энергия решает проблемы человечества с обеспечением энергоресурсами, однако, при работе ядерных электростанций происходит накопление радиоактивных отходов и возможны техногенные катастрофы, что вынуждает продолжать поиск альтернативных источников энергии.

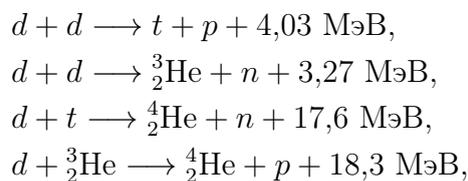
## Часть 2. Термоядерный синтез (0,5 баллов)

Со временем было установлено, что энергия может выделяться не только при реакциях деления тяжелых ядер, но и при синтезе легких элементов из начала таблицы Менделеева.

Наглядная демонстрация этого факта приведена на рисунке, где изображена зависимость энергии связи ядер от атомного номера. Из него видно, что элементы, находящиеся левее Fe, стремятся к синтезу, а находящиеся правее — к делению.



С практической точки зрения наибольший интерес представляют следующие реакции синтеза:



где  $d$ ,  $t$  — это ядра дейтерия и трития. Важно отметить, что первая и вторая реакции равновероятны.

1. (0 баллов) Найдите энергоэффективность реакций термоядерного синтеза.

В отличие от полезных ископаемых и ядерного топлива, дейтерий широко распространен в природе и содержится в воде. Один атом дейтерия приходится на 6500 атомов водорода.

2. (0,5 балла) Сделайте оценку снизу для количества бензина, которое надо сжечь, чтобы получить энергию, равную той, что выделится в реакции синтеза на дейтерии, выделенном с одного стакана воды (0,33 л). Удельная теплота сгорания бензина 44 МДж/кг.

Для протекания реакций ядерного синтеза нужно преодолеть кулоновский барьер отталкивания взаимодействующих частиц. Поэтому для реализации управляемого термоядерного синтеза (УТС) предпочтительно использовать изотопы водорода, которые имеют минимальный заряд среди всех других ядер. Но даже для них реакции термоядерного синтеза могут идти только при очень высоких температурах, на уровне десятков кэВ (1 эВ = 11604 К). При таких температурах любое вещество переходит в состояние плазмы.

### Часть 3. Плазма (0,6 баллов)

Плазма – ионизованный газ, т.е. двухкомпонентная система, состоящая из электронов и положительно заряженных ионов. Для изучения свойств этой системы найдем характерные масштабы расстояния и времени.

#### Характерный масштаб расстояний

Важным свойством плазмы является квазинейтральность, т.е. равенство положительного и отрицательного заряда в любом достаточно большом объёме. Характерным пространственным масштабом в плазме будем называть расстояние, на котором допустимо нарушение квазинейтральности.

Для оценки такого расстояния необходимо рассмотреть экранирование потенциала точечного заряда в плазме. Будем считать, что концентрации электронов и ионов подчиняются распределению Больцмана:

$$n(r) = n_0 \exp\left(-\frac{q\varphi(r)}{kT}\right),$$

где  $n_0$  – нормировочная константа для обеих компонент,  $\varphi$  – потенциал электрического поля в котором находится заряд,  $q$  – его величина,  $T$  – температура.

**Замечание.** В плазме температура ионов и электронов могут различаться, но в данной задаче мы будем считать, что эти компоненты находятся в термодинамическом равновесии.

Из Нулевого Хинта Третьего Эпизода вам известно уравнение Пуассона, которое имеет вид:

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0},$$

где  $\rho$  – плотность заряда. В одномерном случае данное выражение примет вид:

$$(\varphi)''_{xx} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

1. (0,2 балла) Считая, что  $q\varphi \ll kT$ , обезразмерьте уравнение Пуассона и найдите характерный масштаб разделения зарядов.

#### Характерное время в плазме

При нарушении квазинейтральности плазмы, возникающие электрические поля, будут стремиться его устранить.

2. (0,2 балла) Рассмотрим полностью ионизованную плазму при нормальных условиях, в каждом кубическом сантиметре которой находится по  $7 \cdot 10^{16}$  электронов и ионов. Предположим, что в глубине плазмы произошло полное разделение зарядов в слое толщиной 1 см: все электроны собрались вблизи одной плоскости, а ионы вблизи другой. Тогда на границе области, занимаемой плазмой, возникнут нескомпенсированные заряды. Найдите величину электрического поля, возникающего в этом слое.
3. (0,2 балла) Найдите время, за которое заряды вернутся в положение равновесия.

## Часть 4. Критерий Гёренге Нулевой цикл (1,5 балла)

В этом разделе вам предлагается получить критерий, выполнение которого обеспечит выход на нулевую полезную мощность термоядерной электростанции.

Пусть в некотором ограниченном объеме находится плазма, состоящая из ядер дейтерия и трития, а также электронов, образовавшихся в процессе их ионизации (~~никогда такого не было и вот опять~~) и имеющих ту же температуру, что и все их окружение (~~не опять, а снова~~). Каждый из типов ядер ведет себя ~~ненужно~~ как идеальный газ с концентрацией  $n$  и температурой  $T$ . Дейтерий и тритий вступают в реакцию термоядерного синтеза  $d + t \rightarrow {}^4_2\text{He} + n + 17,6 \text{ МэВ}$ .

Будем рассматривать сильно упрощенную модель, в которой сечение столкновения ядер не зависит от их скорости. Т.е. два ядра вступают в реакцию синтеза, если сблизятся на расстояние, меньшее известной суммы некоторых эффективных радиусов  $R = r_1 + r_2$ . Считайте, что все продукты реакций, не взаимодействуя с плазмой, достигают стенок реактора и передают ему всю энергию, выделившуюся в ходе реакции синтеза, а те, в свою очередь, преобразуют ее в электричество и уже оно в дальнейшем используется для нагрева/поддержания температуры плазмы, при этом описанная система обратной связи работает с КПД  $\eta$ .

Известно, что если прекратить нагрев плазмы и «остановить» реакции синтеза, то ее остывание будет описываться зависимостью  $T(t) = T_0 e^{-t/\tau}$ , где  $\tau$  – характерное время остывания, которое определяется конструкционными особенностями реактора и является одним из ключевых его параметров.

1. (1,5 балла) При каком условии на величину  $n\tau$  возможен процесс работы реактора так, что описанная система сможет работать произвольное время и "самоподдерживаться" за счет механизма обратной связи?

## Установки УТС (6 баллов)

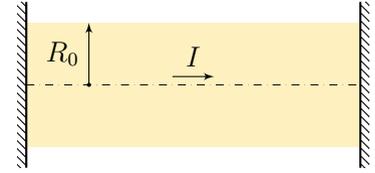
Известно, что во Вселенной термоядерные реакции происходят в недрах звёзд при высоких температурах порядка  $10^7 \text{ К}$ , где плазма удерживается гравитационными силами (массы звёзд очень велики, например, масса Солнца составляет приблизительно  $10^{30} \text{ кг}$ , поэтому гравитационные силы огромны и достаточны для удержания плазмы). При создании установки, осуществляющей термоядерный синтез в лабораторных условиях первая проблема, с которой мы сталкиваемся — удержание плазмы в ограниченном объёме. Вторая же проблема — каким образом снизить потоки тепла и частиц приходящие на стенки реактора.

В этой задаче мы будем анализировать первую из них.

## Часть 5. Z-пинч

### Стационарное равновесие

Рассмотрим плазменный разряд в форме цилиндра длины  $l$ , радиуса  $R_0$  (см. рисунок).

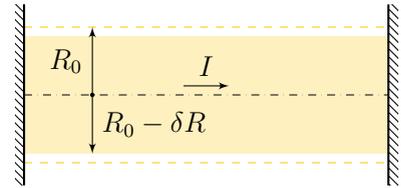


1. (0,2 балла) Какой ток должен протекать через плазму, чтобы она удерживалась в равновесии собственным магнитным полем?

Считайте, что плазма находится в стационарном состоянии, ее температура равна  $T$ , а число ионов на единицу длины  $N$ .

### Устойчивость равновесия

Рассмотрим ситуацию, при которой произошло равномерное по всей длине сжатие плазменного шнура (см. рисунок).



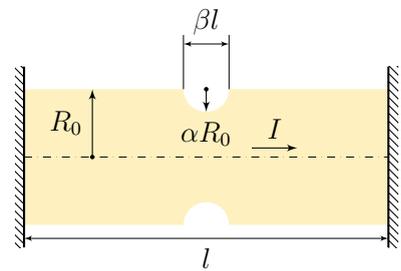
2. (1 балл) Проанализируйте устойчивость положения равновесия из предыдущего пункта. В случае устойчивого положения равновесия найдите период колебаний. Рассмотрите процесс в изотермическом и адиабатическом приближениях.

Температура плазмы  $T$ , число ионов на единицу длины  $N$ , начальный радиус цилиндра  $R_0$ , масса ионов  $m_i$ , масса электронов  $m_e \ll m_i$ .

*Примечание:* Считайте, что радиальный вклад в скорости частиц, связанный с колебаниями, будет пропорционален расстоянию до оси.

### Неустойчивость формы

В некоторый момент на плазменном шнуре появилась перетяжка с характерной длиной  $\beta l$  и глубиной  $\alpha R_0$  (см. рисунок).



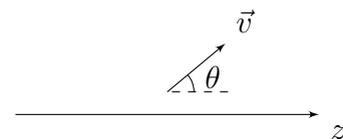
3. (0,2 балла) При каких значениях  $\beta$  перетяжка продолжит сужение к центру и разорвёт плазменный шнур?

Считайте  $\alpha$  и  $\beta$  известными.

## Часть 6. Магнитные зеркала

### Движение частицы в неоднородном поле

Частица массы  $m$ , несущая заряд  $e$ , движется в магнитном поле,  $z$ -компонента которого зависит только от координаты  $z$ :  $B_z = B_z(z)$ . Скорость частицы по модулю равна  $v$  и направлена под углом  $\theta$  к оси  $z$ . Поле вдоль оси  $z$  меняется достаточно медленно ( $\frac{dB_z}{dz} \ll \frac{eB^2}{mv}$ ).

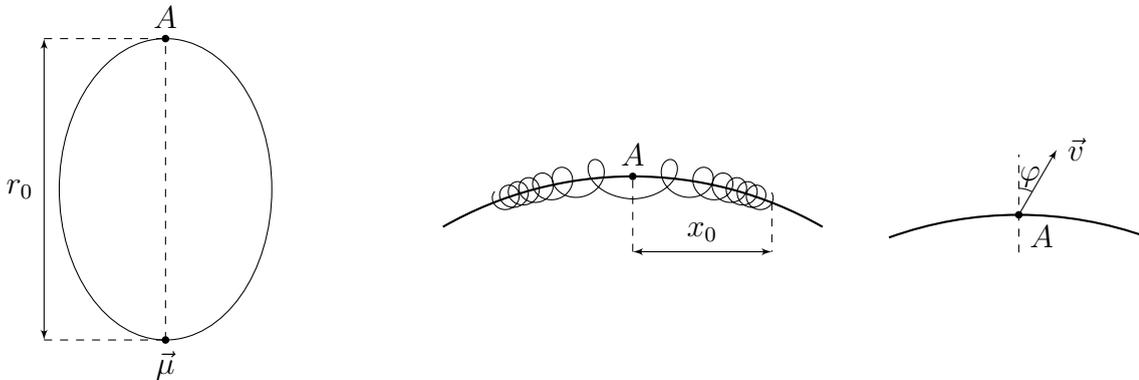


1. (0,2 балла) Найдите усреднённую по времени силу  $F_z$ , действующую на частицу со стороны магнитного поля в окрестности координаты  $z$ .

2. (0,1 балл) Используя предыдущий пункт, найдите инвариант движения частицы.

### Удержание в поле диполя

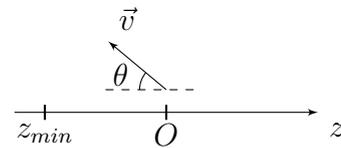
Рассмотрим движение заряженной частицы вдоль силовой линии магнитного диполя в окрестности точки **A**, отстоящей на расстоянии  $r_0$  (см.рис.). Изначально частица в точке **A** имеет скорость, направленную под малым углом  $\varphi$  к нормали силовой линии.



3. (0,3 балла) Найдите амплитуду колебаний частицы  $x_0$ .

### Подвигаем

**First** Частица массы  $m$ , несущая заряд  $e$ , движется в магнитном поле,  $z$ -компонента которого зависит только от координаты  $z$ :  $B_z = B_0 e^{-kz}$ ,  $k > 0$ . Скорость частицы по модулю равна  $v$  и направлена под углом  $0 < \theta < \pi$  против оси  $z$  (см. рисунок). Поле вдоль оси  $z$  меняется достаточно медленно ( $k \ll \frac{eB}{mv}$ ). В начальный момент времени частица находится в  $z = 0$ .



4. (0 баллов) Покажите, что радиальная компонента поля мала.
5. (0,3 балла) Обозначим минимальную  $z$ -координату, которой достигает частица в процессе движения, как  $z_{min}$ . Найдите  $z_{min}$  и время  $t$  движения частицы от 0 до  $z_{min}$ .

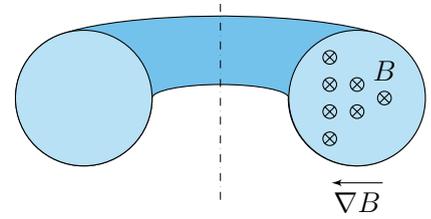
**Second** Рассмотрим ситуацию, при которой поле экспоненциально затухает (например при отключении источника) по закону  $B_0 = A e^{-\alpha t}$ ,  $\alpha > 0$ , зависимость от  $z$ -координаты осталась та же:  $B = B_0 e^{-kz}$ .

6. (0,1 балла) Найдите соотношение между  $\alpha$ ,  $k$ ,  $v$  и  $\theta$ , при котором частица будет неограниченно двигаться влево против направления оси  $z$ .
7. (0,1 балла) Найти скорость дрейфа частицы через большой промежуток времени.
8. (0,4 балла) Найдите  $z_{min}$  и  $t$  в ЛСО, определяемые аналогично терминам части **First**, для случая  $\frac{\alpha}{k} \ll v$  (это условие позволит вам упростить общий вид выражения).
9. (0,1 балла) При одинаковых значениях  $k$  и  $\theta$ ,  $\frac{\alpha}{k} \ll v$  какое из значений  $z_{min}$  меньше: из **First** или из **Second**?

## Часть 7. Токамак

### Дрейф в переменном поле $B$

Частица находится в тороидальной ловушке (см. рисунок) в неоднородном поле  $B$ . Перпендикулярная полю компонента скорости равна  $v_{\perp}$ .



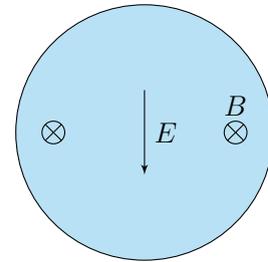
1. (0,5 балла) Найдите дрейфовую скорость частиц плазмы. Будет ли плазма выбрасываться на стенки из-за наличия у частиц этой дрейфовой скорости? Ответ обоснуйте.

Считайте поле  $B$ , градиент модуля поля  $\nabla|B|$ , массу частицы  $m$ , заряд частицы  $q$  и перпендикулярную скорость  $v_{\perp}$  известными.

### Дрейф в скрещенных полях $E$ и $B$

Частица находится в тороидальной ловушке (см. рисунок) в скрещенных полях  $B$  и  $E$ .

2. (0 баллов) Найдите дрейфовую скорость частицы. Будет ли плазма выбрасываться на стенки ловушки из-за наличия у частиц этой дрейфовой скорости? Ответ обоснуйте.



Считайте поле  $B$ , поле  $E$ , массу  $m$  и заряд частицы  $q$  известными.

### Винтовая линия

Чтобы избежать выбрасывания плазмы, силовые линии поля «Закручивают». Так как частицы двигаются вокруг силовых линий, то «Закручивание» приводит к тому, что частицы следуют за силовой линией, и находятся то с одной стороны, то с противоположной от центра ловушки. Благодаря этому в среднем дрейф компенсируется: с одной стороны частицы дрейфуют к центру ловушки, с противоположной стороны дрейфуют от центра.

Закручивание производится следующим образом: поле вдоль кольцевой оси тора (полоидальное поле) создаётся тороидальной катушкой (тороидальный ток), поле вокруг кольцевой оси тора (тороидальное поле) создаётся током внутри плазмы (полоидальный ток). В сумме эти поля дают силовые линии в форме винтовых линий вдоль поверхности тора.

К сожалению, не всякая конфигурация силовых линий устойчива. Пусть силовая линия представляет собой винтовую линию (вдоль поверхности тора) с шагом  $h$ . Для обеспечения устойчивости плазменного шнура максимальная длина волны возмущения  $\lambda$  должна быть менее шага винтовой линии  $h$ . При этом длина волны возмущения в торе не может превышать длину системы, т.е.  $2\pi R$ .

Тогда условие устойчивости относительно винтовых возмущений можно записать как:

$$2\pi R \leq h,$$

где  $R$  — большой радиус тора,  $h$  — шаг винтовой линии.

Отношение этих длин

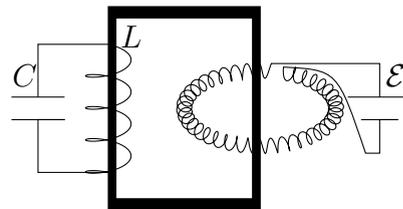
$$q = \frac{h}{2\pi R} \geq 1$$

называют запасом устойчивости.

3. (0,5 балла) Найдите соотношение между полем, создаваемым тороидальной катушкой  $B_z$ , и полем, создаваемым током в плазме  $B_\varphi$ , если параметр устойчивости равен  $q$ , радиус плазменного шнура равен  $a$ , большой радиус тора  $R$ . Изобразите картину силовых линий.

### токамак

Токамак (см. рисунок) является наиболее перспективной системой УТС. Для удержания плазмы в токамаке используется поле тороидальной катушки из медного провода и поле, создаваемое вихревым током в плазме. Ток в тороидальной катушке создают при помощи источника постоянного тока с ЭДС  $\mathcal{E}$ . Ток внутри плазмы создаётся при помощи переменного магнитного поля внутри ферромагнитного сердечника (индуктора), который проходит через центр тора и через внешний контур, состоящий из конденсатора  $C$  и катушки  $L$  (см. рисунок).



Считайте, что в системе есть устойчивость относительно винтовых возмущений с  $q \geq 1$ .

4. (2 балла) Найдите минимальное ЭДС  $\mathcal{E}$  источника, а также пробойное напряжение на которое должен быть рассчитан конденсатор.

Проводимость меди  $\sigma_m = 57 \text{ МСм/м}$ , температура плазмы  $T = 2 \cdot 10^7 \text{ К}$ , площадь сечения медного провода тороидальной катушки  $S = 1 \text{ мм}^2$ , расстояние от центра образующей окружности до оси вращения тора  $R = 1,5 \text{ м}$ , радиус образующей окружности  $r = 15 \text{ см}$ , концентрация ионов в плазме  $n = 10^{20} \text{ м}^{-3}$ , число витков катушки внешнего контура  $N = 1000$ .

Считайте, что зазор между плазменным шнуром и стенкой тора равен 3 см.

При  $T = 2 \cdot 10^7 \text{ К}$  проводимость плазмы равняется проводимости меди и продолжает нарастать с температурой как  $T^{3/2}$ .

Можете полагать, что давление магнитного поля на поверхности плазменного шнура на порядок превосходит давление плазмы. Наведённым током внутри тороидальной катушки и индуктивностью плазменного шнура можно пренебречь.

Первая подсказка — 29.05.2024 20:00 (МСК)

Вторая подсказка — 31.05.2024 15:00 (МСК)

Окончание пятого тура — 02.06.2024 18:00 (МСК)

Разбор пятого тура — 02.06.2024 18:00 (МСК)