Кубок ЛФИ

11.s05.e02

Господа, этот абсурд меня доконал!
Пираты Карибского моря: На краю света

Parte Uno. El Cuadrado

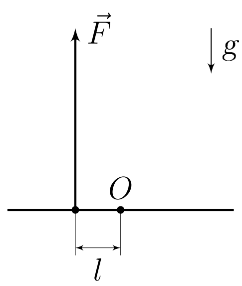
Прислушавшись к совету Муравьишки-Путешественника, Ёжик решил отправиться в круиз с Кубы на Арубу. Джентльмены, которые взялись подвести Ёжика, принимали оплату только ~~рабами: Ромой и Сережкой, ромом, ромовой бабой, сережками~~ квадратными монетками. Ёжику удалось выкрутиться из ситуации, оплатить проезд, и на сдачу ему дали странную монетку в виде Квадратика со стороной ~~эль~~ L и массой m. На двух сторонах Квадратика отчеканены Кубок ЛФИ и Кубик ЛФИ.

Монетка показалась Ёжику фальшивой, да и джентльмены выглядели подозрительно, и он ~~но~~решил её выбросить в море. К удивлению Ёжика, через некоторое время монетка снова оказалась в его котомке. Это заинтересовало Ёжика, и он решил более подробно изучить Квадратик.

Первое на что обратил внимание Ёжик это то, что Квадратик тонкий и однородный. Далее он стал с ним проводить следующий эксперимент.

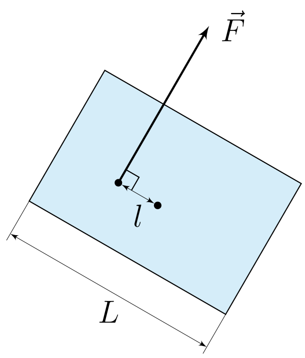
Ёжик бросает Квадратик с высоты H. Бросок производится следующим образом: Ёжик прикладывает короткий импульс силы к горизонтально расположенному Квадратику перпендикулярно его плоскости на случайном расстоянии $l \in \left[0, \frac{L}{2}\right]$ от его центра таким образом, что конечная скорость центра масс Квадратика равна v_0 и направлена вертикально вверх. Отрезок, соединяющий точку приложения силы и центр Квадратика, всегда параллелен одной из его сторон.

Ёжик решил поделиться нулевым Hint'ом. Если на Квадратик действует некоторая сила F в течение небольшого времени τ, то для твердого тела можно записать уравнения динамики:



$$\begin{cases} F = ma_c, \\ M = I\varepsilon, \end{cases}$$

где F — сила, прикладываемая Ёжиком, a_c — ускорение центра масс, I — момент инерции относительно оси вращения, ε — угловое ускорение, M — момент силы F относительно оси вращения O, проходящей через центр масс. Так как $M = Fl$, то:



$$I\varepsilon = lma_c.$$

Поскольку $\varepsilon = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$ и $a_c = \frac{\Delta v}{\Delta t}$, то угловая скорость Квадратика:

$$\Delta\omega = \frac{ml\Delta v}{I} \Rightarrow \omega = \frac{mlv_0}{I}.$$

Для Квадратика считайте момент инерции относительно оси вращения равным $I = \frac{1}{12}mL^2$.

Изначально сверху Квадратика отчеканен Кубик. Считайте, что при касании палубы Квадратик теряет всю свою линейную и угловую скорости.

Найдите вероятность, с которой выпадет Кубок ЛФИ, если все возможные значения $l \in \left[0, \frac{L}{2}\right]$ равновероятны, а параметры системы равны:

1. *(2 балла)* $L = 23{,}00$ мм, $m = 5{,}630$ г, $v_0 = 0{,}8800$ м/с, $H = 5{,}000$ см, $g = 10{,}00$ м/с^2
2. *(3 балла)* $L = 23{,}00$ мм, $m = 5{,}630$ г, $v_0 = 4{,}500$ м/с, $H = 100{,}00$ см, $g = 10{,}00$ м/с^2

Ответ дайте с точностью не менее 4 значащих цифр. Сопротивлением воздуха пренебречь.

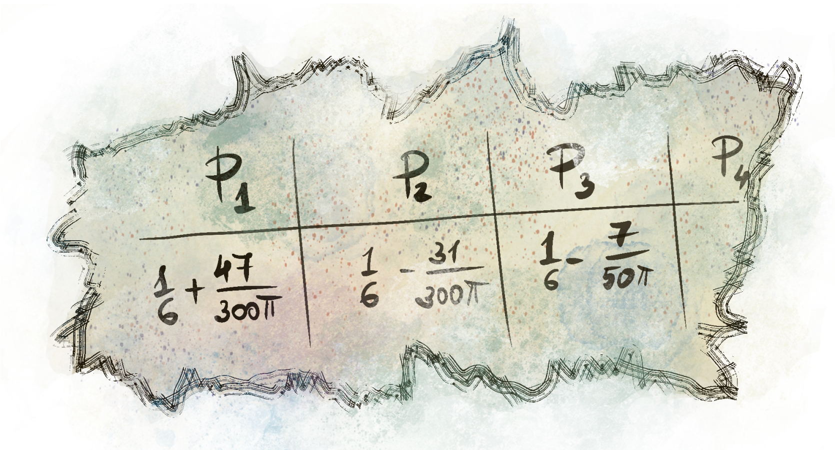
Parte Dos. El Cubo-pícaro

Когда ночью в кают-компании Ёжик играл с джентльменами в кости ~~на Костю~~, один из кубиков показался ему подозрительным. Подгадав удачный момент, Ёжик незаметно реквизировал Кубик, чтобы подробнее его изучить. Чтобы никто его не заметил, Ёжик забрался в воронье гнездо и решил узнать распределение вероятностей [1] выпадения сторон Кубика.

Ёжик ставит Кубик на случайное ребро под случайным углом так, что все углы и ребра равновероятны, после чего отпускает Кубик, и тот падает на одну из граней. Считайте удар Кубика о дно вороньего гнезда абсолютно неупругим. Ёжик фиксирует результат в свой дневник.

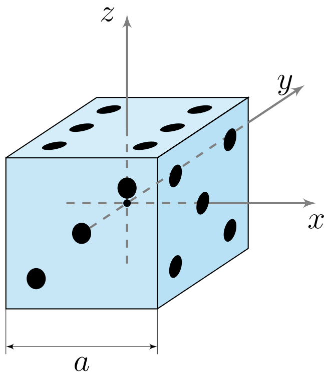
Светало. Ёжик поставил Кубик на рёбра достаточно большое число раз, пересчитал таблицу вероятностей и убедился, что подозрения были неспроста.

Оставшись довольным проделанной работой, Ёжик решил пойти отдыхать в свою каюту. Пока он спускался из вороньего гнезда на палубу, на него напала голодная до знаний чайка. Произошла ~~КРОВАВАЯ~~ битва за дневник с записями. У Ёжика лапки, поэтому всё, что ему удалось сохранить — это маленький клочок бумаги, на котором была только половина таблицы (см. рисунок)



[1] В данном случае распределение вероятностей — это таблица, в которой указаны вероятности выпадения соответствующих граней.

1. *(1 балл)* Пусть центр масс слабо смещен на $\delta\vec{r} = (x,\, y,\, z)$ от центра Куба (см. рис). Выразите вероятности выпадения граней Кубика через смещение центра масс. Упростите полученные выражения, используя приближенные формулы. Учитывайте малые слагаемые по $\frac{x}{a}$, $\frac{y}{a}$, $\frac{z}{a}$ до второго порядка малости включительно.



2. *(2 балла)* Найдите суммы вероятностей для противоположных граней. Учитывайте малые слагаемые по $\frac{x}{a}$, $\frac{y}{a}$, $\frac{z}{a}$ до третьего порядка малости включительно.

3. *(2 балла)* Помогите Ёжику восстановить вероятности выпадения каждой грани, используя данные, которые сохранились в таблице. Учитывайте малые слагаемые по $\frac{x}{a}$, $\frac{y}{a}$, $\frac{z}{a}$ до второго порядка малости включительно.

Примечание 1: сумма очков на противоположных гранях равна 7.
Примечание 2: не волнуйтесь, море не волнуется. Поэтому ~~треской~~ тряской палубы можно пренебречь.

Поскольку Ёжик был Астрономом и увлекался звёздными картами, он знал несколько забавных и полезных фактов, которые могут вам пригодиться:

$$\frac{1}{1+\xi} \approx 1 - \xi + \xi^2 - \xi^3,\ |\xi| \ll 1$$

$$\sqrt{1+\xi} \approx 1 + \frac{\xi}{2} - \frac{\xi^2}{8} + \frac{\xi^3}{16},\ |\xi| \ll 1$$

$$\arcsin\left(\Xi_0 + \xi\right) \approx \arcsin\left(\Xi_0\right) + \frac{\xi}{\sqrt{1-\Xi_0^2}} + \frac{\xi^2 \Xi_0}{2\left(1-\Xi_0^2\right)^{3/2}} + \frac{\xi^3\left(2\Xi_0^2+1\right)}{6\left(1-\Xi_0^2\right)^{5/2}},\ \ |\xi| \ll 1$$

$$\arccos\left(\Xi_0 + \xi\right) \approx \arccos\left(\Xi_0\right) - \frac{\xi}{\sqrt{1-\Xi_0^2}} - \frac{\xi^2 \Xi_0}{2\left(1-\Xi_0^2\right)^{3/2}} - \frac{\xi^3\left(2\Xi_0^2+1\right)}{6\left(1-\Xi_0^2\right)^{5/2}},\ |\xi| \ll 1$$

$$\operatorname{arctg}\left(\Xi_0 + \xi\right) \approx \operatorname{arctg}\left(\Xi_0\right) + \frac{\xi}{\Xi_0^2+1} - \frac{\xi^2 \Xi_0}{\left(\Xi_0^2+1\right)^2} + \frac{\xi^3\left(3\Xi_0^2-1\right)}{3\left(\Xi_0^2+1\right)^3},\ |\xi| \ll 1$$

$$\operatorname{arcctg}\left(\Xi_0 + \xi\right) \approx \operatorname{arcctg}\left(\Xi_0\right) - \frac{\xi}{\Xi_0^2+1} + \frac{\xi^2 \Xi_0}{\left(\Xi_0^2+1\right)^2} + \frac{\xi^3\left(1-3\Xi_0^2\right)}{3\left(\Xi_0^2+1\right)^3},\ |\xi| \ll 1$$

$$\sin\left(\Xi_0 + \xi\right) \approx \sin\left(\Xi_0\right) + \xi\cos\left(\Xi_0\right) - \frac{1}{2}\xi^2\sin\left(\Xi_0\right) - \frac{1}{6}\xi^3\cos\left(\Xi_0\right),\ |\xi| \ll 1$$

$$\cos\left(\Xi_0 + \xi\right) \approx \cos\left(\Xi_0\right) - \xi\sin\left(\Xi_0\right) - \frac{1}{2}\xi^2\cos\left(\Xi_0\right) + \frac{1}{6}\xi^3\sin\left(\Xi_0\right),\ |\xi| \ll 1$$

Пример из заметок на полях:

$$\frac{1}{\Xi_0+\xi+\zeta}=\frac{1}{\Xi_0}\cdot\frac{1}{1+\xi/\Xi_0+\zeta/\Xi_0}\approx\frac{1}{\Xi_0}\left(1-\underbrace{(\xi/\Xi_0+\zeta/\Xi_0)}_{\text{Первый порядок}}+\underbrace{\left((\xi/\Xi_0)^2+2\frac{\zeta\xi}{\Xi_0^2}+(\zeta/\Xi_0)^2\right)}_{\text{Второй порядок}}\right)$$

Настоятельно ~~настаиваем~~ рекомендуем использовать математические ~~котомки~~ пакеты.

Первая подсказка — 06.05.2024 20:00 (МСК)
Вторая подсказка — 08.05.2024 12:00 (МСК)

Окончание второго тура — 10.05.2024 20:00 (МСК)
Разбор второго тура — 10.05.2024 20:00 (МСК)