

Кубок ЛФИ 2023

11.s04.e05

*Легче всего обходит ловушки тот,
кто умеет их расставлять.*

Публилий Сир

Кубит

Вопросы по математике можно задавать [Полякову Филиппу](#), по программированию — [Хромову Диме](#).

Часть 1. (3 балла) Однокубитные гейты в квантовом компьютере

Квантовый бит или *кубит* — это единица хранения памяти в квантовом компьютере. От младшего брата и классического аналога, бита, принимающего лишь два значения — 0 и 1, кубит отличается тем, что представляет собой квантово-механическую систему, обладающую квантовыми свойствами. Учёт этих свойств и описание работы кубитов производится с помощью правильно подобранного математического аппарата. В этой части задачи мы познакомимся с самими кубитами и основными операциями с ними.

Состояние кубита

В атомах энергия электрона часто не может изменяться непрерывно, а принимает дискретные значения (например, в атоме водорода). Кубит — это модель квантово-механической системы, в которой рассматривается только два уровня энергии. Например, в одном из компьютеров в Российском квантовом центре (РКЦ) в качестве кубитов используется ион кальция, одним из уровней которого является основное состояние внешнего электрона, а другое — одно из его возбужденных состояний.

Состояние кубита описывается двумерным комплексным вектором

$$\psi = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_0 \end{pmatrix},$$

где c_0 и c_1 — это комплексные функции, которые называются *амплитудами вероятности*, для которых выполняется условие $|c_0|^2 + |c_1|^2 = 1$.

Если $\psi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ то это основное состояние, аналогичное тому, когда классический бит принимает значение 0. Если $\psi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, то это возбуждённое состояние, аналогичное тому,

когда классический бит принимает значение 1. Произвольное же состояние кубита можно представить в виде

$$\psi = c_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = c_0\psi_0 + c_1\psi_1.$$

Можно также сказать, что функции c_0 и c_1 являются *амплитудами обнаружения* кубита в состояниях ψ_0 и ψ_1 . Из квантовой механики следует, что если мы проведём какое-либо измерение состояния кубита, то он обязательно окажется или в состоянии ψ_0 , или в состоянии ψ_1 . Число $|c_0|^2$ показывает вероятность того, что после измерения состояния кубита он окажется в состоянии 0, а $|c_1|^2$ — вероятность того, что он окажется в состоянии 1. До измерения кубит находится в состоянии $\psi = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_0 \end{pmatrix}$, т.е. в суперпозиции этих двух состояний.

Квантово-механическая система отличается от классической тем, что при её измерении её состояние принципиально изменяется. В случае кубитов после измерения он оказывается либо в состоянии $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, либо в состоянии $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Пример 1. Кубит находится в состоянии $\begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$. Если мы проведём измерение состояния квантово-механической системы, то он окажется в состоянии $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ с вероятностью $1/4$, а в состоянии $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ с вероятностью $3/4$.

Пример 2. Кубит находится в состоянии $\begin{pmatrix} i/\sqrt{2} \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$. Вероятности того, что после проведения измерения состояния кубита он окажется в состоянии ψ_0 или ψ_1 равны $1/2$.

1.1. (*0,1 балл*) Известно, что кубит находится в состоянии $\begin{pmatrix} 1+i \\ 2 \\ x \end{pmatrix}$. Найдите x .

Из того факта, что $|c_0|^2 + |c_1|^2 = 1$ следует, что одним из способов, которым можно задать общий вид состояния кубита является выражение

$$\psi = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\psi_0 + e^{i\varphi}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\psi_1.$$

Такую параметризацию часто выбирают из-за её удобной и наглядной интерпретации через сферу Блоха (см. рис. 1). На ней состояние характеризуется единичным вектором, образующим угол θ с осью z . Его проекция на плоскость xy образует угол φ с осью x .

Важно отметить, что в общем виде состояние кубита определено с точностью до глобальной фазы:

$$\psi = e^{i\alpha} \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\psi_0 + e^{i\varphi}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\psi_1 \right).$$

Действия с кубитами

Аналогично логическим операциям в классическом компьютере (И, ИЛИ, НЕ и др.), в квантовом компьютере вычисления проводятся с помощью квантовых операций над кубитами, которые также называют квантовыми *гейтами*. Различают однокубитные гейты,

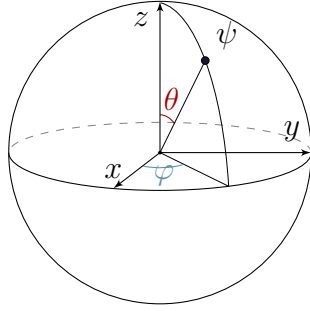


Рис. 1: Сфера Блоха

действующие только на один кубит, и многокубитные гейты, действующие на набор кубитов размером 2 и больше. Действие гейта изменяет состояние кубита и может быть представлено матрицей, действующей на вектор ψ . В этой части задачи мы предлагаем вам поработать с однокубитными гейтами.

Матрицей однокубитного гейта является комплекснозначная матрица размера 2×2

$$U = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

со следующими свойствами: $U^\dagger U = U U^\dagger = I$, где $U^\dagger = (U^T)^*$ — транспонирование и комплексное сопряжение матрицы U , I — единичная матрица. Матрицы, обладающие таким свойством, также называют *унитарными матрицами*.

Действие матрицы на состояние кубита описывается обычным матричным умножением матрицы на вектор-столбец

$$U\psi = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_0 \end{pmatrix}.$$

- 1.2. (0,1 балл) Вычислите вероятность, с которой кубит окажется в состоянии 0 после действия на него гейта U , считая элементы A, B, C и D и c_1, c_0 известными.

Произвольное линейное преобразование $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ определяется восемью вещественными параметрами. Требование унитарности уменьшает количество независимых параметров.

- 1.3. (0,1 балл) Сколько независимых вещественных параметров однозначно задает унитарное преобразование?
- 1.4. (0,1 балл) Найдите унитарное преобразование U , если известно, что $U^2 = U$.
- 1.5. (0,1 балл) Докажите, что последовательно выполненные однокубитные гейты также являются однокубитным гейтом.

Однокубитные гейты часто раскладывают через матрицы Паули, которые имеют следующий вид

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

- 1.6. (0 баллов) Проверьте, что матрицы Паули являются унитарными.
- 1.7. (0,2 балла) Подействуйте по отдельности матрицами Паули на вектор $\begin{pmatrix} i/\sqrt{2} \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$. Как

изменяются амплитуды обнаружения состояния ψ_0 и ψ_1 . Изобразите исходное и полученное состояния на сфере Блоха.

1.8. (0,1 балл) Какой геометрический смысл имеет каждое из преобразований X , Y , Z ?

1.9. (0,1 балл) Найдите разность $XY - YX$?

Введём элемент (гейт) Адамара

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

1.10. (0,1 балл) Найдите, чему равны следующие матрицы

$$HXH, \quad HXH, \quad HZH.$$

1.11. (0,1 балл) Подействуйте элементом Адамара на состояния $(\psi_0 + \psi_1)/\sqrt{2}$. Чему будут равны вероятности обнаружить кубит в состояниях ψ_0 и ψ_1 после действия этого гейта? Как изменится ответ, если исходное состояние было $(\psi_1 - \psi_0)/\sqrt{2}$?

При решении следующего пункта вам могут быть полезны [следующие формулы](#). Определим понятие экспоненты от матрицы

$$e^{\alpha A} = I + \alpha A + \frac{\alpha^2}{2!} A^2 + \dots + \frac{\alpha^n}{n!} A^n + \dots$$

1.12. (0,4 балла) Найдите

$$R_x(\theta) = \exp\left(-\frac{i\theta X}{2}\right), \quad R_y(\theta) = \exp\left(-\frac{i\theta Y}{2}\right), \quad R_z(\theta) = \exp\left(-\frac{i\theta Z}{2}\right).$$

Считайте, что θ — действительное число.

1.13. (0,1 балл) Являются ли R_x , R_y , R_z однокубитными гейтами?

1.14. (0,3 балла) Какой геометрический смысл имеет каждое из преобразований R_x , R_y , R_z ?

Из предыдущих пунктов и их геометрической интерпретации следует, что произвольный однокубитный гейт можно представить следующим образом

$$U = e^{i\alpha} R_z(\beta) R_y(\gamma) R_z(\delta),$$

где α , β , γ и δ — некоторые вещественные числа.

1.15. (0,2 балла) Подберите параметры α , β , γ и δ , чтобы получить гейт Адамара.

1.16. Предложите однокубитный гейт, чтобы перейти из состояния $c_0 = c_1 = 1/\sqrt{2}$ в состояние

(а) (0,1 балла) $c_0 = \sqrt{2}/2$ и $c_1 = i\sqrt{2}/2$;

(б) (0,1 балла) $c_0 = \sqrt{3}/2$ и $c_1 = 1/2$;

(в) (0,1 балла) $c_0 = \sqrt{3}/2$ и $c_1 = i/2$.

Осцилляции Раби

В квантовом компьютере на ионах любое манипулирование кубитами производится с помощью лазеров. Так, для проведения однокубитных операций необходимо светить на ион лазером с частотой, в точности равной частоте перехода. Для кальция эта частота равна 411,0421297763931 ТГц (длина волны лазера на этой частоте равна 729,3472767939562 нм). Матрица гейта в таком случае зависит от времени, в течение которого мы светим лазером на ион, и задается следующей формулой

$$U(t) = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\Omega t}{2}\right) & e^{-i\varphi+i\frac{\pi}{2}} \sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right) \\ e^{i\varphi-i\frac{\pi}{2}} \sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right) & \cos\left(\frac{\Omega t}{2}\right) \end{pmatrix}.$$

Здесь Ω — это параметр, характеризующий взаимодействие иона с лазером, который называется частотой Раби, φ — фаза лазера и t — время. Частота Раби взаимодействия иона с лазером определяется внутренними свойствами иона и интенсивностью лазерного пучка.

1.17. (0,1 балла) Найдите, какими должны быть время гейта (длительность лазерного импульса) и фаза лазера, чтобы матрица гейта была равна матрице Паули Y , если частота Раби равна $1,6/2\pi$ МГц.

Фиделити операций

В лазере существуют шумы интенсивности и частоты и другие несовершенства экспериментальной установки, которые приводят к ошибкам, в результате чего реальный гейт может отличаться от того, который мы хотели реализовать. Это приводит к потере точности (фиделити) операций.

Для вычисления точности операций используется следующее правило. Пусть исходно кубит находится в некотором состоянии ψ , а нам необходимо провести гейт G , в результате которого будет получено состояние $G\psi = g_0\psi_0 + g_1\psi_1$. В ходе проведения эксперимента был реализован другой гейт \tilde{G} , несколько отличающийся от исходного, и получено состояние $\tilde{G}\psi = \tilde{g}_0\psi_0 + \tilde{g}_1\psi_1$. Тогда фиделити F вычисляется по следующей формуле:

$$F = |\tilde{g}_0^*g_0 + \tilde{g}_1^*g_1|^2.$$

Пусть нашей целью было провести гейт Адамара, а получилось как всегда преобразование

$$\tilde{H} = \frac{1}{\sqrt{1+0,99^2}} \begin{pmatrix} 0,99 & 1 \\ 1 & -0,99 \end{pmatrix}.$$

1.18. (0,1 балла) Найдите фиделити, если начальное состояние было $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1.19. (0,1 балла) Чему будет равно фиделити для начального состояния из предыдущего пункта, если мы хотели провести преобразование Адамара 10 раз и каждый раз получали матрицу \tilde{H} ?

1.20. (0,1 балла) Как изменится ответ на первый вопрос 18, если начальное состояние было $\begin{pmatrix} i/\sqrt{2} \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$.

Коррекция ошибок

Как и для классического компьютера, для квантового компьютера разработаны специальные коды, которые позволяют исправлять (проводить коррекцию) возникающих ошибок. В данном пункте мы рассмотрим **классический** способ коррекции ошибок, чтобы понять идею алгоритма.

Пусть мы будем считать одним логическим битом компьютера (состояние которого, например, мы хотим передать на некоторое расстояние) три физических бита. В ходе передачи состояния логического бита один или несколько битов из тройки физических могут изменить свои состояния. Будем считать ошибкой только ситуацию, в которой физический бит переворачивается, т. е. его состояние меняется на противоположное, и пусть вероятность переворота одного физического бита p .

После передачи физические биты могут либо оказаться в правильном состоянии, либо перевернуться и привести к ошибке. Будем считать, что состоянием логического бита будет состояние, в котором оказалось большинство физических битов. Т. е. если после измерения мы фиксируем результат как 001, то считаем, что логический бит находится в состоянии 0. А если результат 101, то считаем, что состояние логического бита — 1. Если после выполнения операции перевернулось два бита одновременно, тогда мы определим состояние ошибочно. Эта схема является простейшей схемой коррекции ошибок, для которой мы увеличиваем количество физических носителей единицы хранения информации, и за счет этого повышаем устойчивость к ошибкам.

До передачи все биты находятся в правильном состоянии.

- 1.21. *(0,1 балла)* Найдите, какой должна быть вероятность переворота одного физического бита p , чтобы кодирование тремя битами было надёжнее, чем одним.
- 1.22. *(0,1 балла)* Пусть вероятность переворота одного физического бита $p = 0,1$. Сколько таких физических битов нужно взять для кодирования одного логического бита, чтобы при наличии классической схемы коррекции ошибок вероятность неправильного считывания состояния логического кубита была меньше 0,01. Считайте, что битов нечетное число.

Часть 2 (5 баллов). Ловушка Пауля

Для создания кубитов нам необходимо локализовать отдельные ионы в пространстве. Для превращения атомов кальция в кубиты их сначала отделяют от кусочка кальция методом лазерной абляции, затем однократно ионизируют, при этом атом превращается в положительно заряженный ион, а после – захватывают в ловушку Пауля, помещенную в сверхвысокий вакуум. Дальнейшее, более глубокое охлаждение ионов практически до нулевой температуры позволяет создать основное состояние кубита.

Захват и удержание ионов в ловушках Пауля

Введение

2.1. Пусть в окрестности начала декартовой системы координат функция потенциала имеет вид:

$$\varphi(x, y, z) = \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2,$$

где α , β и γ – некоторые константы.

- (а) (0,2 балла) Найдите проекции напряженности электрического поля $E_x(x, y, z)$, $E_y(x, y, z)$ и $E_z(x, y, z)$.
- (б) (0,3 балла) Найдите, чему равна плотность заряда в начале координат.
- (с) (0,1 балла) В каком случае она будет равна нулю.

Согласно хорошо известной теореме Ирншоу в том случае, если есть только электростатические поля, то заряд не может находиться в устойчивом положении равновесия. Однако, если электрические поля переменные, то можно создать ситуацию, где траектория движения заряженной частицы будет всегда ограничена в пространстве. Для этого необходимо подобрать правильную конфигурацию электродов, а также частоты и амплитуды подаваемых на них напряжений. Одним из примеров, где это было реализовано служит ловушка Пауля, свойства которой предлагается изучить в данной части задачи.

Ловушкой Пауля называется совокупность электродов, на которые подаются постоянные и осциллирующие на радиочастоте напряжения. При правильно подобранных параметрах потенциалов и частоты в пространство между электродами можно захватить заряженные частицы.

Конфигурация электрических полей ловушки Пауля описывается следующим аналитическим потенциалом:

$$\Phi = \left(-\frac{V_{\text{RF}} \cos \Omega t}{r_0^2} - \frac{k_z U_{\text{DC}}}{z_0^2} \right) \frac{x^2}{2} - \left(\frac{-V_{\text{RF}} \cos \Omega t}{r_0^2} + \frac{k_z U_{\text{DC}}}{z_0^2} \right) \frac{y^2}{2} + \frac{k_z U_{\text{DC}}}{z_0^2} z^2, \quad (1)$$

где Ω – циклическая радиочастота электродов, V_{RF} – напряжения на радиальных электродах переменных полей, r_0 и z_0 – геометрические параметры ловушки (расстояния от центра ловушки до соответствующих электродов), U_{DC} – напряжение на аксиальных электродах, k_z – геометрический параметр аксиального удержания.

В наших обозначениях оси OX и OY называются радиальными осями ловушки, а ось OZ – аксиальной.

- 2.2. (0,1 балла) Пусть $V_{\text{RF}} = 0$. Изобразите качественно траекторию частицы, если в нулевой момент времени она находится в точке с координатами $(1; 1; 0)$ и ее начальная скорость равна нулю.

2.3. (0,1 балла) Рассмотрим плоскость $z = 0$. Пусть $\frac{V_{\text{RF}}}{r_0^2} = \frac{2k_z U_{\text{DC}}}{z_0^2}$. Изобразите качественно зависимость $\Phi(x, y, 0)$ в момент времени $t = 0$ и в момент времени $t = \pi/\Omega$.

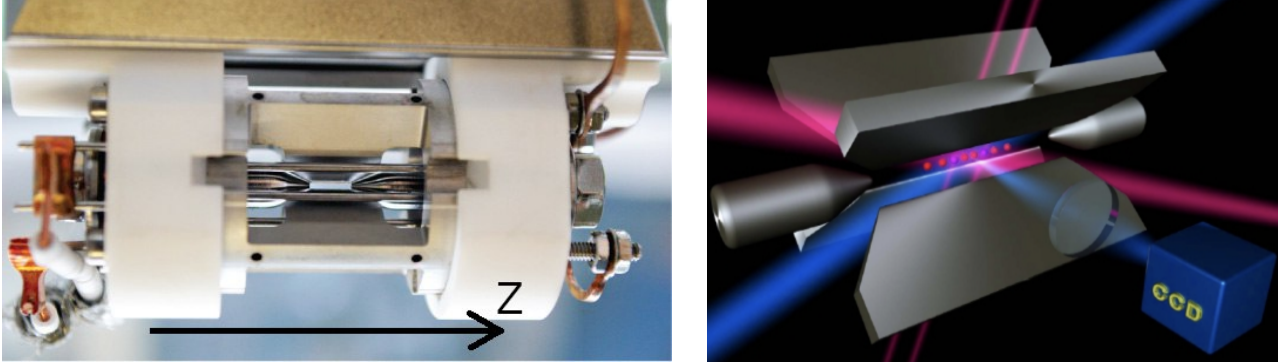


Рис. 2: Фотография и схема ловушки Пауля, с сайта quantumoptics.at лаборатории Райнера Блатта, г. Инсбрук, Австрия

Уравнения движения для частицы массы m и заряда e в данном потенциале, следующие из (1), называются уравнениями Матье и имеют вид

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{d\tau^2} + (a_x - 2q_x \cos 2\tau) x = 0, \\ \frac{d^2y}{d\tau^2} + (a_y - 2q_y \cos 2\tau) y = 0, \\ \frac{d^2z}{d\tau^2} + a_z z = 0, \end{cases} \quad (2)$$

где параметры уравнений описываются следующими формулами

$$\tau = \frac{\Omega}{2}t, \quad a_x = a_y = -\frac{a_z}{2} = -\frac{4ek_z U_{\text{DC}}}{mz_0^2\Omega^2}, \quad q_x = -q_y = q = \frac{2eV_{\text{RF}}}{mr_0^2\Omega^2}.$$

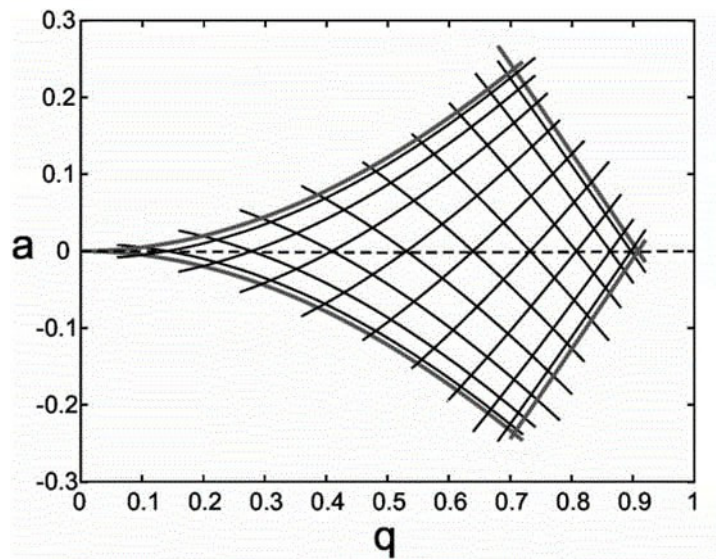
Заметим, что параметры уравнений Матье зависят от экспериментальных характеристик ловушки: напряжений на электродах, радиочастоты и геометрических параметров. Следовательно, свойства уравнений Матье (и, как следствие, их решений) могут контролироваться соответствующим изменением параметров ловушки Пауля.

Если параметры ловушки подобраны хорошо, решения уравнений Матье (2) такие, что траектория иона ограничена в пространстве. Мы будем считать, что ион захвачен в том случае, если его траектория ограничена и амплитуда колебаний иона меньше геометрических размеров ловушки (менее 1 мм). Для такого захвата значения параметров a и q по всем направлениям движения (аксиальному и радиальным) должны принадлежать **зоне стабильности**. Пример диаграммы стабильности для некоторой ловушки Пауля представлен на рисунке. Заштрихованная область — это зона стабильности, незаштрихованная — область параметров, при которой ионы покидают ловушку.

Численное моделирование

В этой части задачи мы предлагаем вам численно промоделировать уравнения траектории ионов в ловушке Пауля и изучить их свойства.

Для того, чтобы вам не пришлось ничего программировать, мы подготовили [тетрадку](#) в среде Google Colab. Можно использовать без смс, но с регистрацией.



Проходите по [ссылке на тетрадку](#) (на всякий случай, [вот](#) она еще раз). заходите в свой гуглакаунт, нажимаете на выполнение кода и вы счастливы. Да, ячейки можно скрывать и открывать нажатием на треугольник. Работать стало удобнее!

Подробно про то, как пользоваться тетрадкой рассказано [в данном видео](#). Если Когда у вас ~~останутся~~ появятся вопросы о том, как пользоваться данной тетрадкой, то вы можете их задать в личные сообщения [вот этому человеку](#). Не стесняйтесь, он готов и заряжен отвечать 25 (двадцать пять) на 7.

Замечание. В [тетрадке](#) параметр RF_frequency — это не циклическая частота, он связан с параметром в формуле 1 формулой $\text{RF_frequency} = \Omega/2\pi$.

- 2.4. (0,3 балла) Пусть $a_x = -0,1$. При каких значениях параметра q_x в диапазоне от -2 до 2 траектории ионов вдоль оси x будут ограниченными в пространстве. В качестве ответа приведите интервалы параметра q_x . Границы интервала определите с точностью до $0,1$. Будет ли ион захвачен в ловушку?
- 2.5. (0,3 балла) Пусть $a_x = 0,1$. При каких значениях параметра q_x в диапазоне от -2 до 2 траектории ионов вдоль оси x будут ограниченными в пространстве. В качестве ответа приведите интервалы параметра q_x . Границы интервала определите с точностью до $0,1$. Будет ли ион захвачен в ловушку?
- 2.6. (0,3 балла) Пусть $a_y = -0,01$. При каких значениях параметра q_y в диапазоне от -2 до 2 траектории ионов вдоль оси x будут ограниченными в пространстве. В качестве ответа приведите интервалы параметра q_y . Границы интервала определите с точностью до $0,1$. Будет ли ион захвачен в ловушку?

Доплеровское охлаждение ионов в ловушке Пауля

Для более эффективной работы ловушки Пауля ионы охлаждаются, используя эффект Доплера. В этой части задачи мы более подробно изучим то, как это делается.

Вопросы по Доплеру

- 2.7. (0 баллов) Источник излучает свет на частоте ω_0 и движется вдоль прямой, соединяющей его и приемник со скоростью v_0 . Чему равна частота излучения, которую будет детектировать приемник?
- 2.8. (0,2 балла) Источник и приемник находятся в точках A и B соответственно. Источник движется со скоростью v_0 перпендикулярно к AB , приемник движется со скоростью v_0 вдоль линии AB (см. рис.). Чему равна частота излучения, которую будет детектировать приемник, если в системе отсчета источника он испускает сигнал на частоте ω_0 ?



- 2.9. (0,1 балла) Рассмотрим идеальный газ. Вероятность того, что скорость атома газа лежит в интервале от v до $v + dv$ определяется выражением

$$N4\pi v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv,$$

где m — масса атома, k — константа Больцмана, T — температура газа, N — нормировочный постоянный множитель. Найдите наиболее вероятную скорость атома. Наиболее вероятной скоростью называется скорость, близкой к которой обладает наибольшее число молекул.

- 2.10. (0 баллов) Атом движется со скоростью v_0 навстречу лазерному пучку. Электрон находится в основном состоянии. Электрон может перейти в возбужденное состояние если поглотит фотон с частотой ω_0 . Чему должна быть равна отстройка лазера $\Delta\omega$ от частоты ω_0 чтобы атом поглотил фотон?
- 2.11. (0 баллов) Импульс фотона с частотой ω определяется выражением $\hbar\omega/c$. Найдите скорость атома из предыдущего пункта, если он поглотил фотон.
- 2.12. (0,3 балла) В экспериментальной установке поток одиночных атомов натрия вылетает со средней скоростью 10^5 см/с навстречу лазерному источнику с длиной волны 363,8 нм. При взаимодействии с лазерным излучением атом поглощает фотон и переходит из основного энергетического состояния в возбужденное. При дальнейшем движении атом может вернуться в исходное состояние при вынужденном или спонтанном испускании фотона. Вынужденное испускание фотона провоцируется взаимодействием с внешним фотоном и испущенный фотон имеет такое же значение энергии и направление распространения, как и провоцирующий (при этом этот процесс никак не влияет на провоцирующий фотон). А при спонтанном испускании новый фотон имеет то же значение энергии, что и последний поглощенный фотон, но уже случайное направление. Считая процессы вынужденного и спонтанного излучения равновероятными рассчитайте среднее количество поглощений фотонов лазерного излучения атомами натрия, необходимое для «охлаждения» атомов до нулевой скорости движения.

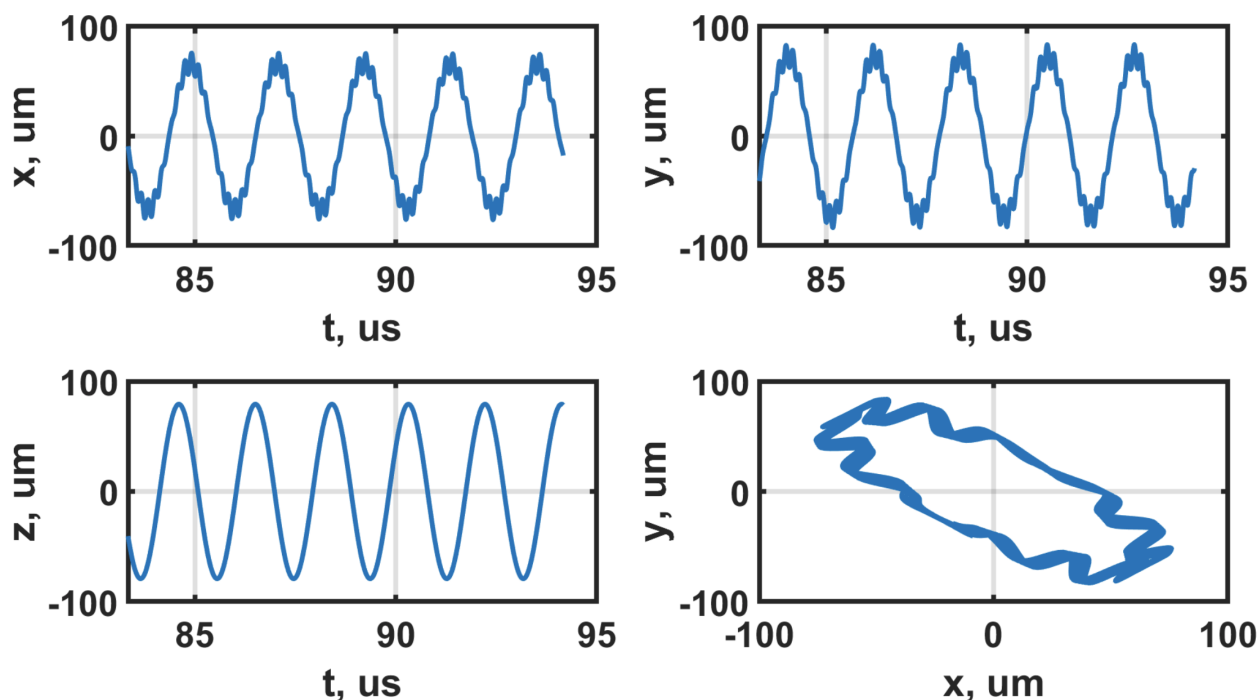
В экспериментах с ловушками Пауля часто используют доплеровское охлаждение. В следующих пунктах сначала будет анализироваться ситуация без доплеровского охлаждения, а в п. 2.15 мы его реализуем.

Если ионы охлаждены достаточно (до температуры¹ меньше мК), приближенное решение вдоль радиальных координат описывается следующей формулой:

$$x(t) \propto \cos\left(\frac{\omega_x t}{2}\right) \left(1 - \frac{q_x}{2} \cos \Omega t\right),$$

где первый множитель — колебания на секулярной частоте $\omega_x/2$, а второй множитель описывает небольшие и частые осцилляции иона вдали от центра ловушки.

2.13. (0,1 балла) Подберите параметры Ω , U_{DC} и V_{RF} так, чтобы захватить ион. Физическими являются напряжения от 1 до 1000 В. Радиочастоту можно менять в пределах от 20 до 30 МГц. Получите картинки таким образом, чтобы были обязательно видны осцилляции на секулярной частоте и микродвижения. Должны получиться картинки примерно следующего вида. В качестве ответа пришлите значения параметров и графики с подписанными осями и единицами измерений.



2.14. (0,2 балла) Из графиков координат от времени найдите секулярные частоты колебаний иона в ловушке. Сравните с частотами, полученными в спектре. Проверьте, что в спектре появляется также частота микродвижений, совпадающая с радиочастотой, подаваемой на электроды.

2.15. (0,4 балла) Включите охлаждение ионов. Для этого перейдите к ячейке «исследование ванны Ланжевена», в которой добавляется сила вязкого трения, действующая на ион и уменьшающая его кинетическую энергию. У ланжевенской ванны есть параметр скорости охлаждения γ , и температура T_0 , до которой мы хотим охладить (или нагреть) ион. Включите ланжевенскую ванну с различными параметрами γ и T_0 . Постройте графики зависимости температуры иона от времени. Сравните время τ , за которое температура иона уменьшается в 10 раз с параметрами ланжевенской ванны. В качестве ответа на этот пункт представьте графики и формулу, связывающую параметры ланжевенской ванны со временем τ .

¹температура иона определяется его кинетической энергией, деленной на константу Больцмана k

2.16. В рамках численного моделирования, с помощью ланжевеновской ванны мы можем охладить ион до нуля кельвинов (задаем параметр $T_0 = 0$). Если ионов в ловушке несколько, то при охлаждении до нуля они занимают некоторые положения равновесия в потенциале ловушки и кулоновском потенциале их взаимного отталкивания, и полученное «твердое тело» называется кулоновским кристаллом. Поместите 5 ионов в ловушку при тех параметрах, которые вы подобрали в предыдущих пунктах, и охладите их до нуля.

(а) (0 баллов) Опишите конфигурацию полученного кристалла?

(б) (0 баллов) Выстраиваются ли ионы в линейную цепочку вдоль оси OZ ? (Если ионы выстроились в линейную цепочку, то радиальные координаты равны 0 с очень хорошей точностью, $< 10^{-34}$).

2.17. (1 балл) Тот факт, выстраиваются ли ионы вдоль линии, зависит от соотношения секулярных частот вдоль радиальных и аксиальной осей (см. верхний рисунок на следующей странице). А именно, для линейности цепи должно выполняться условие след. вида:

$$\left(\frac{\omega_r}{\omega_z}\right)^2 \geq \frac{N^\alpha}{A},$$

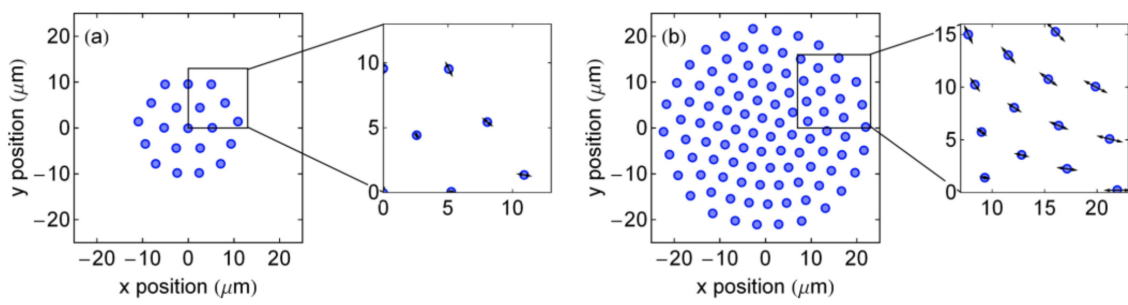
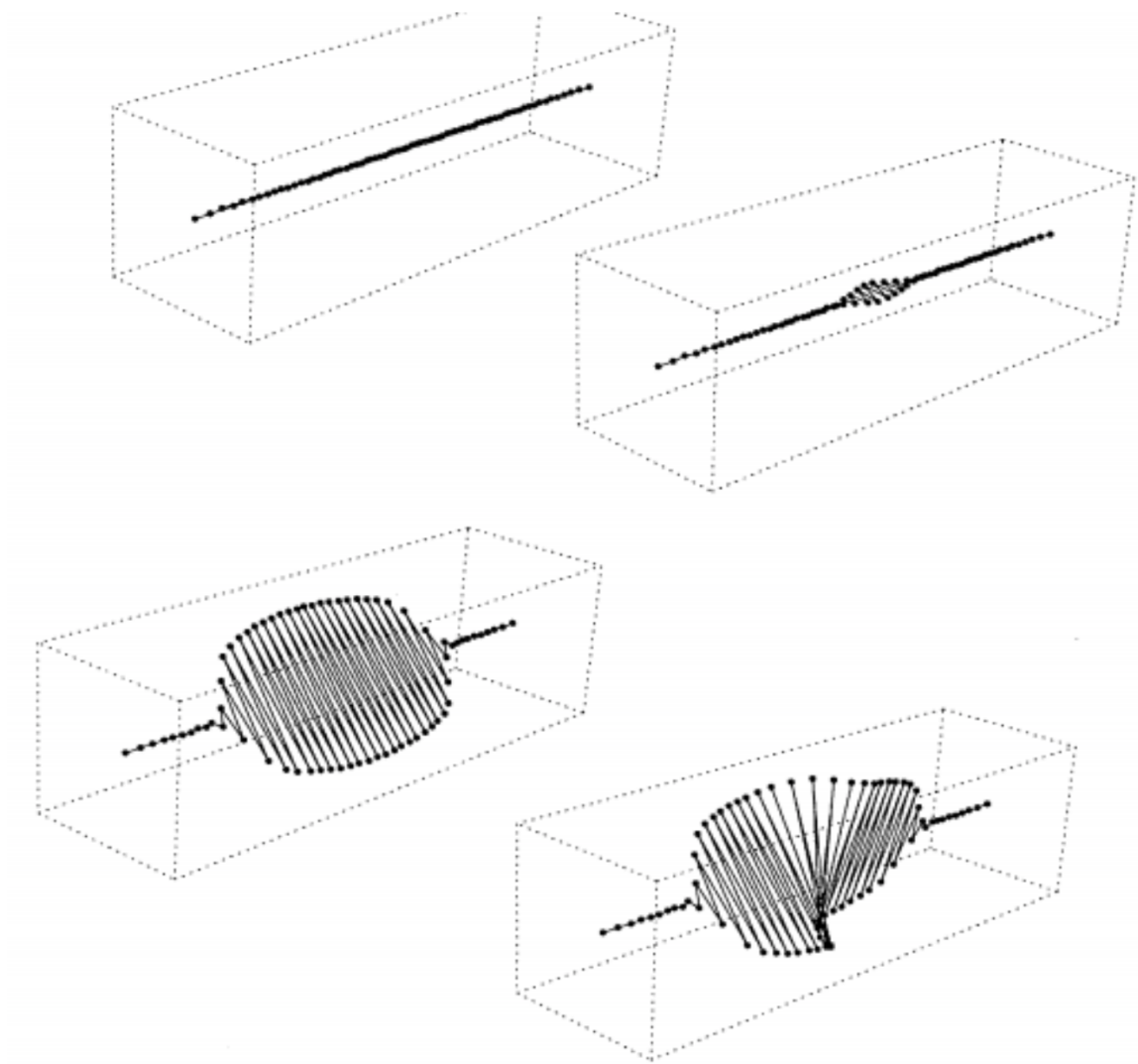
где α и A — некоторые константы, которые вам необходимо найти.

Замечание! При проведении моделирования в этих пунктах проверяйте, что у вас действительно получается линейный кристалл, а также то, что при данных параметрах ловушки ионы ей захватываются.

2.18. (1 балл) При других частотах колебаний, ионы будут выстраиваться в двумерную решетку перпендикулярно аксиальному направлению (см. нижний рис. на следующей странице). В этом случае должно выполняться условие:

$$\frac{\omega_z}{\omega_r} > (BN)^\beta$$

найдите параметры B и β .



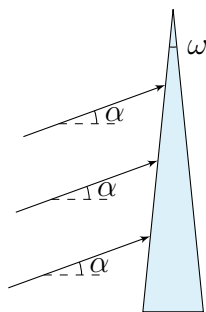
Часть 3 (2 балла). Лазерный пинцет

Ловушка Пауля не единственный вариант схемы захвата ионов. Например, существует метод лазерного пинцета, про который и пойдёт речь в данной части задачи.

Приближение геометрической оптики

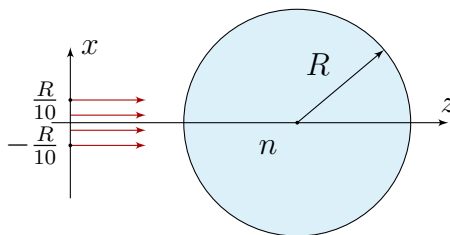
В том случае, когда длина волны излучения достаточно мала, мы можем рассматривать вопрос взаимодействия излучения с веществом в рамках геометрической оптики. Как и в части 2 будем рассматривать свет как поток фотонов, импульс отдельного фотона будет равен $\hbar\omega/c$, где ω — частота излучения, а c — скорость света, \hbar — приведённая постоянная Планка. Считайте, что $\hbar\omega$ — это энергия отдельного фотона.

- 3.1. (0 баллов) Пусть свет нормально падает на плоскую поверхность. Мощность излучения, приходящаяся на единицу площади равна I . Чему равно давление света, если поверхность полностью поглощает свет? Если полностью отражает? Если отражает долю фотонов равную α .
- 3.2. (0,3 балла) На тонкую призму с показателем преломления n и малым углом при вершине ω (см. рис.) падает параллельный пучок, составляющий малый угол α с горизонтом. Найдите величину и направление силы, действующей на призму со стороны пучка. Считайте, что свет призмой не отражается и не поглощается. Мощность излучения, приходящаяся на единицу площади равна I , площадь пучка S . Считайте, что пучок полностью попадает на призму.



- 3.3. На цилиндр с показателем преломления n радиуса R , находящийся в вакууме, падает тонкий пучок света так, как показано на рисунке. Мощность света на единицу площади зависит от координаты x по закону $I = I_0(1 - x/R)$, при $x \in [-R/10, R/10]$. При других значениях интенсивность равна 0. Считайте, что свет цилиндром не отражается и не поглощается. Высота цилиндра равна H .

- (а) (0,4 балла) Чему равна сила, действующая на цилиндр?
- (б) (0,2 балла) В какую сторону она направлена?

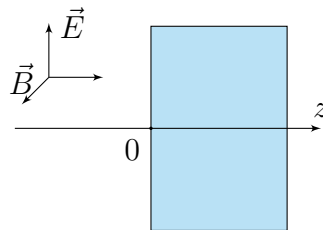


- 3.4. (0,1 балла) Как изменится направление силы, если показатель преломления цилиндра будет меньше показателя преломления окружающей среды?

Приближение волновой оптики

Если длина волны много больше объекта с которым взаимодействует излучение (например ион кальция) приближение геометрической оптики не работает. Тем не менее и в этом случае ион может стремиться локализоваться в областях, где наблюдаются максимумы квадрата электрического поля. В данной части задачи мы рассмотрим один из вариантов создания такого распределение электрического поля в приближении волновой оптики.

- 3.5. (0,1 балла) Плоская электромагнитная волна частоты распространяется в вакууме вдоль оптической оси z . Напряжённость электрического поля в волне задаётся выражением $E(z, t) = E_0 \cos\left(\frac{\omega}{c}z - \omega t\right)$. Запишите выражение для волны, которая распространяется против оси z .
- 3.6. Пусть электромагнитная волна частоты ω распространяется в вакууме вдоль оптической оси z и нормально падает на проводник, который располагается в плоскости $z = 0$.



- (a) (0,3 балла) С учетом отраженной волны найдите распределение электрического поля в области $z < 0$.
- (b) (0,1 балла) На каком расстоянии от проводника при $z < 0$ располагается первый узел, т. е. плоскость, в которой амплитуда колебаний равна нулю?
- (c) (0,1 балла) На каком расстоянии от проводника располагается первая пучность, т. е. плоскость, в которой амплитуда колебаний максимальна?
- 3.7. В реальном эксперименте мы используем не плоские волны, а лазерное излучение с некоторым распределением интенсивности в его поперечном сечении. В результате, в опытах, схема эксперимента которых аналогична предыдущей можно получить распределение электромагнитного поля таким, что энергия взаимодействия кубита массы m и единичного заряда с оптической ловушкой будет иметь вид:

$$E_{\text{int}} = -C \frac{8P}{\pi w_0^2} \frac{1}{1 + \frac{z^2}{z_R^2}} \exp\left(-\frac{2r^2}{w_0^2 \left(1 + \frac{z^2}{z_R^2}\right)}\right) \cos^2\left(\frac{2\pi}{\lambda_L} z\right),$$

где $C = 377\alpha_e/2$ — поляризуемость атома в единицах атомной поляризуемости, $\alpha_e = 1,65 \cdot 10^{-41}$ Кл²·м²/Дж, P — мощность излучения (от 0 до 10 Вт), $\lambda_L = 532$ нм — длина волны лазерного излучения, $w_0 = 50$ мкм — ширина пучка, $z_R = \frac{\pi w_0^2}{\lambda_L}$ — длина Рэлея, $r^2 = x^2 + y^2$ — расстояние от оси ловушки до иона.

- (a) (0,2 балла) Найдите выражение для силы, действующей вдоль оси x .
- (b) (0,2 баллов) Найдите выражение для силы, действующей вдоль оси z .

Первая подсказка — 23.05.2023 20:00 (МСК)

Вторая подсказка — 25.05.2023 20:00 (МСК) — без Альтернативной задачи!

Окончание пятого тура — 28.05.2023 12:00 (МСК)
Разбор пятого тура — 28.05.2023 12:00 (МСК)