



*Самые лучшие шляпы — цилиндры.  
Туве Янссон. Волшебная зима*

## Цилиндр

### Траектории лучей в цилиндре

Аналогии между разными задачами физики, при наличии известного решения для одной из них, зачастую позволяют получить короткое решение другой. Например, в [Третьем Эпизоде Второго Сезона Кубка ЛФИ](#), одиннадцатиклассникам предлагалось получить форму брахистохроны при движении материальной точки по гладкому каналу внутри однородного шара с помощью оптико-механической аналогии. В рамках данной задачи вам также предлагается воспользоваться аналогией между оптикой и механикой, но уже для анализа траектории движения луча в неоднородной оптической среде.

Основой геометрической оптики является принцип Ферма, утверждающий, что в оптической среде с показателем преломления  $n(\vec{r})$  величина оптического пути

$$\ell_o = \int_A^B n(\vec{r}) dl$$

между точками  $A$  и  $B$  принимает экстремальное значение.

В основе поиска положений равновесия механических систем лежит принцип экстремума потенциальной энергии, утверждающий, что в положении равновесия потенциальная энергия системы принимает экстремальное значение.

Рассмотрим невесомую нить, равномерно заряженную по длине с плотностью заряда  $\lambda$  и находящуюся в электростатическом поле с потенциалом  $\varphi(\vec{r})$ . Если нить закреплена в точках  $A$  и  $B$  и её собственной энергией можно пренебречь, то из принципа экстремума потенциальной энергии следует, что величина

$$W_p = \lambda \int_A^B \varphi(\vec{r}) dl$$

также принимает экстремальное значение.

Пусть  $\varphi(\vec{r}) = An(\vec{r}) + B$ , где  $A$  — заданная, а  $B$  — произвольная постоянная величина. Тогда, если длины нити и траектории луча одинаковы — траектория луча и форма нити совпадают. Данная аналогия может быть полезна для решения следующей задачи.

Рассмотрим бесконечно длинный цилиндр радиусом  $R$  с осью  $z$ , показатель преломления которого зависит от расстояния  $r$  до оси цилиндра по закону

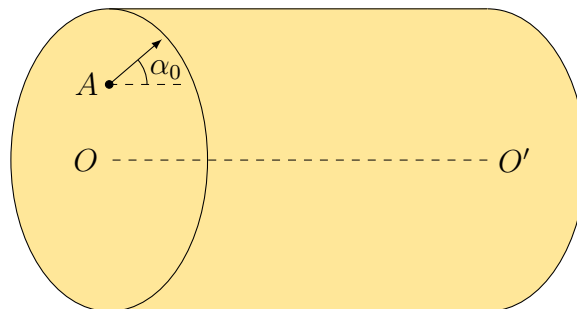
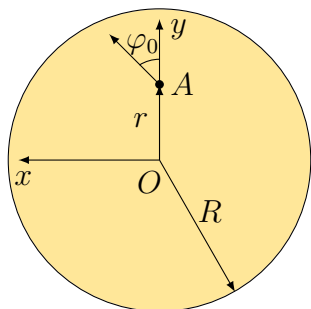
$$n(r) = \sqrt{2 - \frac{r^2}{R^2}}.$$

Цилиндр находится в воздухе, показатель преломления которого равен единице.

Рассмотрим траектории лучей, проходящие через точку  $A$  цилиндра, находящуюся на расстоянии  $r_0 = R/2$  от оси цилиндра.

Направление распространения луча в точке входа будем характеризовать углом  $\alpha_0$  между осью цилиндра и волновым вектором, а также углом  $\varphi_0$ , определяемым следующим образом: Пусть  $\vec{e}_0$  — единичный вектор, направленный вдоль луча в точке  $A$ . Тогда в системе координат  $(x, y, z)$  вектор  $\vec{e}_0$  раскладывается следующим образом

$$(e_{0x}, e_{0y}, e_{0z}) = (\sin \alpha_0 \sin \varphi_0, \sin \alpha_0 \cos \varphi_0, \cos \alpha_0).$$



1. (3,5 балла) При каком значении  $\alpha_0$  траектория луча представляет собой винтовую линию?

В пунктах 2 и 3 величина  $\alpha_0$  задана и равна  $\pi/4$ .

2. (4 балла) При произвольном значении  $\varphi_0$  найдите  $r_{\min}$  и  $r_{\max}$  — минимальное и максимальное расстояние от точек траектории до оси цилиндра соответственно. Считайте, что луч не выходит из цилиндра.
3. (2,5 балла) При каких значениях  $\varphi_0 \in [0; \pi]$  луч движется внутри цилиндра, не выходя из него через боковую поверхность?

Первая подсказка — 02.05.2022 14:00 (МСК)

Вторая подсказка — 04.05.2022 14:00 (МСК)

Окончание третьего тура — 06.05.2022 22:00 (МСК)