



Кубок ЛФИ

11.s02.e03



Точность бьёт силу, тайминг бьёт скорость

Конор Макгрегор

It's time

Внутри однородного шара радиуса R , гравитационное поле на поверхности которого равняется g , проведён гладкий и узкий канал, соединяющий северный полюс шара с точкой его экватора. Канал проведён таким образом, что если из точки, находящейся на северном полюсе, без начальной скорости отпустить материальную точку, то время её движения по каналу до точки экватора оказывается минимально возможным. В рамках данной задачи вам предстоит найти это минимально возможное время.

1. (1 балл) Найдите скорость материальной точки v на расстоянии r от центра шара.

Далее наиболее удобно воспользоваться оптико-механической аналогией. Пусть внутри шара сферически симметрично распределено вещество с показателем преломления $n(r)$. Рассмотрим движение луча в такой среде. Обозначим угол между радиус-вектором луча \vec{r} , проведённым из центра шара, и вектором его скорости \vec{v} за φ .

2. (2 балла) Найдите соотношение, связывающее n , r и φ .
3. (1 балл) Найдите с точностью до постоянного множителя $n(r)$ такое, чтобы оптимальная гравитационная траектория движения материальной точки и траектория луча в данной среде совпадали.

Обозначим за O центр шара, а за C — точку траектории, которую в данный момент проходит луч. Проведём через точку C хорду AB (в плоскости траектории луча), перпендикулярно направлению вектора скорости луча \vec{v} , при этом $AC > BC$.

4. (3 балла) Для фиксированного положения точки B найдите возможное геометрическое место точек C . Найдите также минимально возможное расстояние OC .

Примечание. Вам может понадобиться теорема о произведении отрезков хорд.

Вернёмся к исходной задаче.

5. (3 балла) Найдите минимальное возможное время t_{\min} движения материальной точки от северного полюса до точки на экваторе.

Автор задачи: А. И. Уймин

Первая подсказка — 17.05.2021 14:00 (МСК)

Вторая подсказка — 19.05.2021 14:00 (МСК)

Финал третьего тура — 21.05.2021 22:00 (МСК)