



Кубок 7 ЛФИ

10.s07.e03

Hint 0

Не понимая как помочь Ом Ному, вы неожиданно для себя нашли tutorial к игре. Не испытывая особых надежд, вы всё же решили открыть его и полистать.

Несколько важных идей

Как несложно заметить, данная задача посвящена баллистике. Обычно такие задачи решаются или алгебраическим, или векторным методами. Однако существует еще и третий способ, который сочетает в себе все эти идеи и порой он бывает удобнее первых двух. Метод этот — использование свойств кривых второго порядка, а именно параболы.

Геометрические свойства параболы

Так как мы имеем дело с параболическими траекториями в параболической яме, нельзя обойтись без напоминания геометрических свойств параболы. Заметим, что у параболы довольно много определений равносильных друг между другом. Например в алгебре вы определяете параболу как график квадратичной функции вида $y = ax^2 + bx + c$, где a, b, c — коэффициенты, $a \neq 0$. Однако есть и другое определение, которое говорит, что парабола — это геометрическое место точек на плоскости, для которых расстояние до заданной точки, называемой фокусом параболы равно расстоянию до заданной прямой, называемой её директрисой (см. рисунок).

Эти определения равносильны друг другу и вы можете в этом самостоятельно убедиться. Для этого рассмотрите параболу, заданную в системе координат (x, y) уравнением

$$4p(y - y_0) = (x - x_0)^2$$

и проверьте, что она может быть определена как ГМТ точек, равноудалённых от фокуса $F(x_0, y_0 + p)$ и директрисы $y = y_0 - p$.

Заметим также, что вершина параболы при этом есть (x_0, y_0) ; радиус кривизны параболы в вершине равен $2p$, а кроме того имеет место оптическое свойство параболы: касательная к параболе в точке X является биссектрисой между XF и XP , где P - проекция X на директрису. Последние два факта могут быть не такими очевидными, как первый, но всё же они достаточно общеизвестны и поэтому их доказательство мы оставим читателю.

Подведём краткий промежуточный итог.

Идея 1. Параболы бывает удобно рассматривать в терминах её фокусов и директрисы. Если вы знаете где проходит директриса параболы и где находится её фокус, то вы знаете про параболу всё.

Идея 2. Оптическое свойство параболы — касательная, проведённая к параболе является биссектрисой угла между фокальным радиусом: отрезком, соединяющим точку касания с фокусом параболы и перпендикуляром к директрисе.

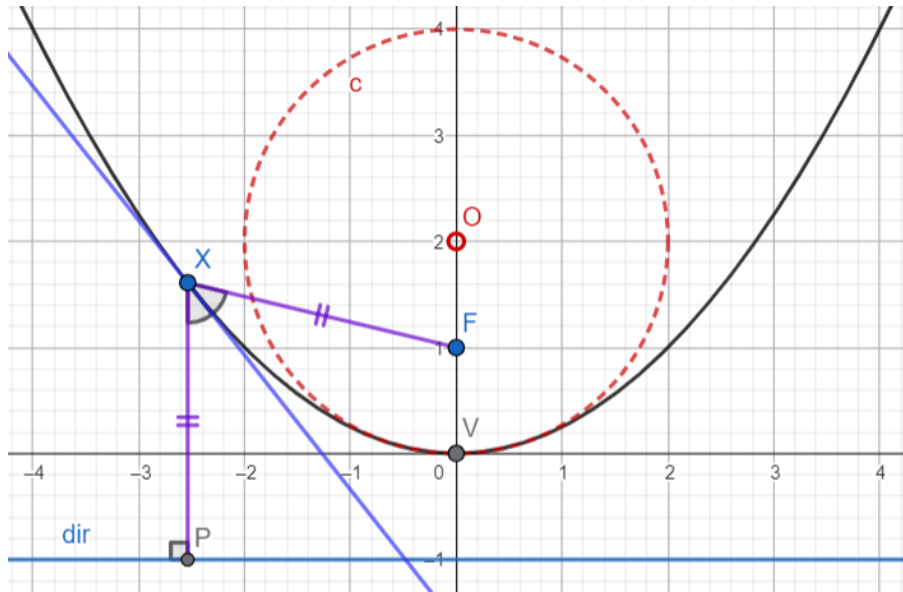


Рисунок 1: Иллюстрация основных свойств параболы. По осям отложены $(x - x_0)/p, (y - y_0)/p$.

Геометрический смысл энергии

Рассмотрим процесс движения в гравитационном поле. В этом случае траектория движения тела будет — парабола, ветви которой будут направлены вниз, а полная механическая энергия материальной точки будет определяться выражением:

$$E = \frac{mv^2}{2} + mgy.$$

Рассмотрим вершину параболы (x_0, y_0) , в ней скорость тела направлена горизонтально и равна v_x , а ускорение — вертикально вниз и равно g . Тогда, вычисляя радиус кривизны, мы получаем

$$2p = R_{кр} = \frac{v_x^2}{g} \iff \frac{mv_x^2}{2} = mgr.$$

Мы видим, что кинетическая энергия в верхней точке равна потенциальной энергии тела, поднятого на высоту p . Но p в то же время определяет расстояние от вершины параболы до её фокуса и директриссы, откуда получаем удивительный факт:

Идея 3. Полная энергия E летящего тела равна потенциальной энергии этого тела на высоте директриссы его траектории.

Из этого следует, что если материальная точка движется по параболе и испытывает упругий удар, то поскольку её механическая энергия не изменяется, то директрисса остаётся одной и той же. Более того, при необходимости легко рассчитать её высоту:

$$y_{dir} = y_{start} + \frac{v_0^2}{2g},$$

где y_{start} — координата y , отвечающая началу движения, а v_0 — начальная скорость.

Отметим, что получить этот факт можно и без использования радиуса кривизны, достаточно явно выписать уравнения движения $(x(t), y(t))$ (удобнее всего отсчитывать время от вершины параболы), преобразовать в зависимость $y(x)$ и найти фокус.

Чтобы однозначно задать параболу, достаточно в дополнение к директриссе знать фокус. Если мячик находится в точке X и имеет скорость \vec{v} , положение фокуса найти совсем легко из оптического свойства: нужно отразить перпендикуляр XP , опущенный на директриссу, относительно \vec{v} :

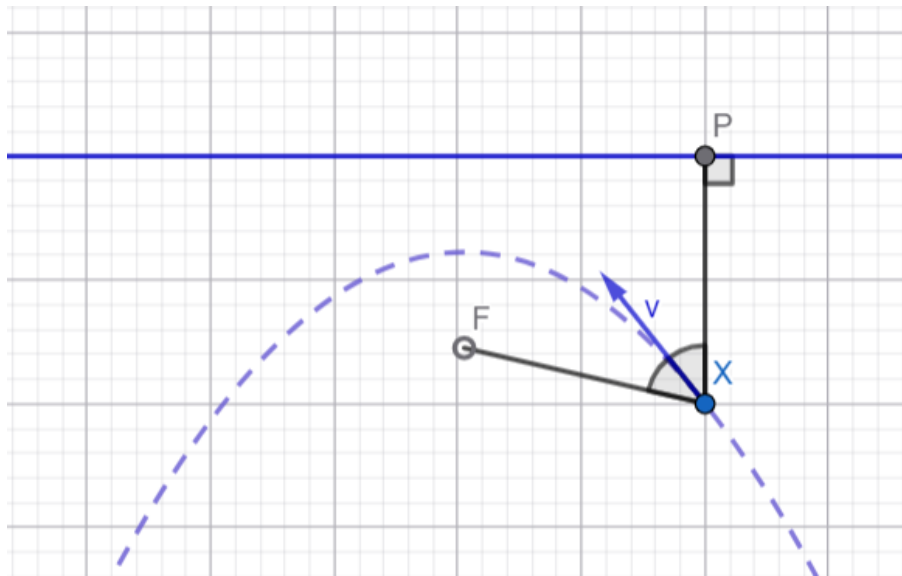


Рисунок 2: Отыскание фокуса по скорости в данной точке.

В завершении хотим вам предложить сделать полезное **упражнение**. Пусть небольшое тело бросают из точки P со скоростью v_0 , направленной под произвольным углом к горизонту. Найдите геометрическое место точек, которое образуют фокусы всех возможных парабол по которым может полететь тело.

Важно заметить, что любую задачу на баллистику можно решить каждым из вышеперечисленных методов. И задачу предложенную в этом Эпизоде тоже, но выбор метода — это вопрос удобства. По мнению Жюри метод рассмотрения фокусов и директрисс может быть вам полезен, но мы на нём ни в коем случае не настаиваем и если вам использовать данный подход некомфортно, то просто не делайте это.