



# Кубок 7 ЛФИ

10.s07.e02

## Hint 2

**ВАЖНО!** Задача является одновременно и хинтом, и альтернативой к основной задаче. Три важных момента:

1. Вы можете продолжать присылать решение основной задачи.
2. В любой момент до финального дедлайна вы можете перейти на решение *альтернативной задачи*. Если вы это делаете, то в самом начале решения напишите: *Я перехожу на решение альтернативной задачи!* В этом случае Штрафной коэффициент за альтернативную задачу будет равен

$$0,7 \cdot \sum_i \frac{k_i \cdot p_i}{10},$$

где  $p_i$  — балл за пункт, а  $k_i$  — штрафной коэффициент за соответствующий пункт на момент перехода на Альтернативную задачу. Другими словами, максимальный балл за альтернативную задачу равен максимальному баллу, который вы можете получить в момент перехода на нее, умноженному на 0,7. Заметим, что штрафной коэффициент не может быть меньше 0,1. Также напоминаем, что **решения основной задачи с этого момента не проверяются**, а все баллы за основную задачу **обнуляются**. Будьте внимательными!

3. Задача состоит из нескольких пунктов. Штрафной множитель, заработанный **до этого** применяется ко всем пунктам. В дальнейшем каждый пункт оценивается как отдельная задача. Если вы присылаете решение без какого-либо пункта, то его решение считается Incorrect. Более подробно о начислении баллов для составных задач смотрите в Правилах проведения Кубка.

## Альтернативная задача

«Отчаяние» — пожалуй, именно этим словом можно было описать состояние Мстислава Лося, который уже несколько дней бился над решением, казалось бы, известных ему еще с лицейской скамьи вопросов.

«Это же прописные истины, не может быть такого, что они не верны», — всё время повторял взъерошенный и невыспавшийся инженер с пятидневной щетиной на лице, продолжающий ходить из угла в угол своей мастерской в поиске ошибки в своих рассуждениях. Он не заметил, как наступил рассвет, а вместе с ним и полдень, который был ознаменован боем настенных часов. Удары небольших механизированных молоточков по миниатюрному гонгу вывели Мстислава из состояния персеверации.

Он перевёл взгляд с часов на старую книжную полку в самом дальнем углу своей мастерской, где хранились его ещё лицейские конспекты вперемешку с тетрадами университетских времён. Словно в состоянии лунатизма (что является лишь небольшим преувеличением, поскольку Мстислав Лось не спал уже несколько дней) он подошёл к полке и стал листать свои старые записи.

## Из записей Мстислава Лося

### Тетрадь 1

*Определение* Дипольным моментом электрически нейтральной системы называется величина равная:

$$\vec{p} = \int \rho \vec{r} dV,$$

где  $\vec{r}$  — радиус вектор элемента объема  $dV$ , а  $\rho$  — плотность заряда в этом объеме.

При этом при решении задач мы чаще всего будем использовать другое определение дипольного момента и представлять систему зарядов в виде двух точечных зарядов  $q$  и  $-q$  на расстоянии  $l$  друг от друга, а величину дипольного момента будем записывать как:

$$\vec{p} = ql\vec{l},$$

где вектор  $\vec{l}$  направлен от отрицательного заряда к положительному.

**Упражнение.** Докажите, что напряженность электрического поля диполя равна:

$$\vec{E} = \frac{3k(\vec{p}, \vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{k\vec{p}}{r^3}$$

Данный результат считается общеизвестным и его можно использовать без доказательства. Отправлять на проверку ваши доказательства не нужно.

### Задача 1

Проводящий шар с нулевым суммарным зарядом радиуса  $R$  помещён в однородное электрическое поле  $\vec{E}_0$ . Представляя шар как суперпозицию двух равномерно заряженных шаров радиуса  $R$  с плотностями заряда  $\rho$  и  $-\rho$ , найдите:

1. (1 балл) На какое расстояние должен сместиться один шар относительно другого, чтобы они оказались в положении равновесия.

2. (0,5 балла) Чему равна величина дипольного момента такой системы.
3. (0,5 балла) Считая, что объемная плотность заряда  $\rho$  стремится к бесконечности, а смещение одного шара относительно другого по этой причине сколь угодно мало, найдите, как зависит поверхностная плотность заряда на проводящем шаре от угла  $\theta$  между направлением вектора напряженности электрического поля  $\vec{E}_0$  и радиус-вектором  $\vec{r}$ , проведенном к элементарной площадке  $dS$  на поверхности шара.

## Тетрадь 2

### Задача 2

В вершинах Кубика находятся одинаковые точечные заряды  $q$ .

4. (0,5 балла) Чему равен поток, создаваемый одним зарядом через весь Куб?
5. (0,5 балла) Чему равен суммарный заряд внутри Кубика?

**Упражнение.** Попробуйте вывести формулу для телесного угла при вершине прямого кругового конуса с углом раствора  $\alpha$

$$\Omega = 2\pi \left(1 - \cos \frac{\alpha}{2}\right)$$

Данный результат считается общеизвестным и его можно использовать без доказательства. Отправлять на проверку ваши доказательства не нужно.

### Задача 3

Конус с углом раствора при вершине  $\alpha$  равномерно заряжен по объему. Высота конуса  $H$ .

6. (1,5 балла) Найдите, чему равно значение электростатического поля в вершине конуса.

### Задача 4

В точках  $A$  и  $B$  находятся точечные заряды  $+q$  и  $-q$ . Силовая линия, выходящая из  $A$  под углом  $\alpha$  к  $AB$  пересекает плоскость, проходящую через середину отрезка  $AB$ , перпендикулярно к нему, под прямым углом в точке  $P$ .

7. (1,5 балла) Докажите, что  $\sin \alpha/2 = \sqrt{2} \sin \frac{1}{2} \angle PAB$ .

## Тетрадь 3

### Задача 5

Точечный заряд находится над проводящей плоскостью в точке  $A$ . Расстояние до плоскости  $AB = H$ .

8. (0,5 балла) Постройте изображение заряда и найдите силу их взаимодействия.
9. (1 балл) Найдите, чему равен суммарный заряд части проводящей плоскости в виде круга с центром в точке  $B$  и радиуса  $R$ .

### Задача 6

Проводящий шар радиуса  $R$  находится в поле точечного заряда  $q$ , который находится на расстоянии  $2R$  от центра шара.

10. (1 балл) Какой минимальный заряд надо сообщить шару, чтобы на его поверхности не было точек, где будет отрицательная плотность заряда?
11. (1 балл) Какой минимальный заряд нужно поместить на проводящий шар чтобы ни одна силовая линия от заряда  $q$  не дошла до шара?
12. (0,5 балла) Какие в этом случае углы будут образовывать силовые линии, вышедшие из заряда  $q$ , с осью  $x$  на бесконечности (см. условие основной задачи)?