



Кубок VI ЛФИ

10.s06.e05

*Дело в том, что время на небе и на земле летит не одинаково.
Там – мгновения, тут – века...
Все относительно. Впрочем, это долго объяснять.
Тот самый Мюнхгаузен*

Содержание

Целое	2
1 Кинематика СТО	2
Вычисление расстояний в разных координатах	2
Постулаты СТО	3
Преобразования Галилея и Лоренца	4
Пространство-время Минковского	5
Эффекты релятивистской кинематики	6
Парадокс близнецов	7
Импульс и энергия	8
2 Классическая черная дыра	10
3 ОТО	11
Теоретический минимум	11
Движение в плоскости (t, r)	13
Падение в черную дыру	14
Общий случай движения частицы в метрике Шварцшильда	16
Смещение перигелия Меркурия	17

Целое

Во Втором Эпизоде у 9-10 классов мы говорили с Участниками Кубка ЛФИ про время, а в 11 классе мы предложили задачу, которая красиво решалась геометрическим методом. В Третьем Эпизоде 10-11 классов Участникам предлагалось познакомиться с вариационным принципом и применением симметрии для анализа распространения света в градиентных средах.

~~Это вжжжж неспроста~~ Все это было неспроста.

При изучении объектов, которые движутся с большими скоростями (со скоростями, сопоставимыми со скоростью света) классические законы механики Ньютона становятся неприменимыми и дают результаты, которые противоречат эксперименту. Для описания движения таких объектов был разработан отдельный раздел физики, называемый *специальной теорией относительности*. Продолжая накапливать экспериментальные данные, в частности занимаясь вопросами гравитации, было выяснено, что теорию можно развивать дальше и была создана *общая теория относительности*.

Данные разделы физики разговаривают на языке геометрии и используют например такие понятия как: метрика, интервал, кривизна и так далее. Кроме того, в этих разделах используется понятия действия и вариационного принципа.

В этом Эпизоде мы расскажем вам про этот особый язык, то как он работает, и какие результаты с помощью него могут быть получены и осознаны уже сейчас.

В разделе 1 мы разберем вопросы, связанные со специальной теорией относительности (СТО), после которого мы убедимся в том, что СТО не достаточно для описания таких объектов как черная дыра (раздел 2) и предложим Участникам 10-11 классов перейти к общей теории относительности (раздел 3).

Успехов!

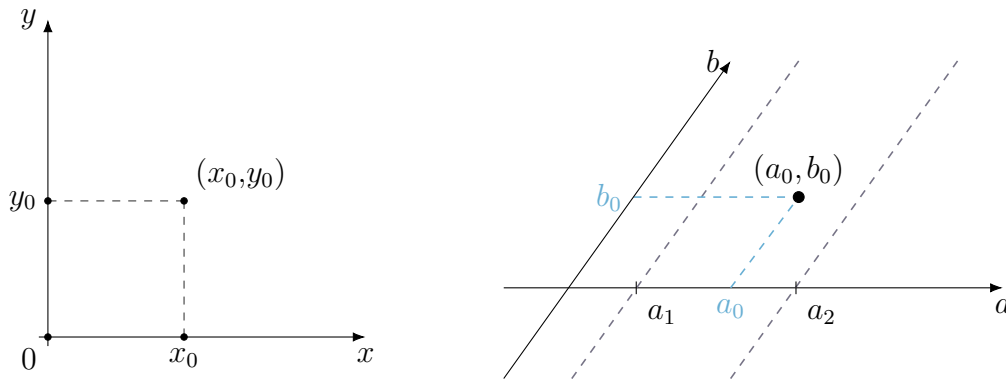
Кот Чарльз

1 Кинематика СТО

Специальная теория относительности (СТО) является физической теорией, нашедшей огромное число практических применений, активно использующая язык геометрии, а именно — геометрии пространства-времени Минковского. В этом разделе мы будем изучать кинематические аспекты СТО.

Вычисление расстояний в разных координатах

Рассмотрим двумерную декартову систему координат. Тогда положение точек будет задаваться парой чисел (x, y) . Чтобы построением найти координату точки по одной из осей, нам нужно провести через эту точку прямую, параллельную второй оси до пересечения с первой. Данный алгоритм является общим и работает и в случае неперпендикулярных друг другу осей. Из этого же следует, что линиями постоянных координат по одной оси будут являться прямые, параллельные второй оси.



Траекторией в такой системе координат будет называться зависимость одной координаты от другой, например, $y(x)$. Расстояние в такой системе координат определяется с помощью теоремы Пифагора, то есть малый элемент длины записывается так:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2.$$

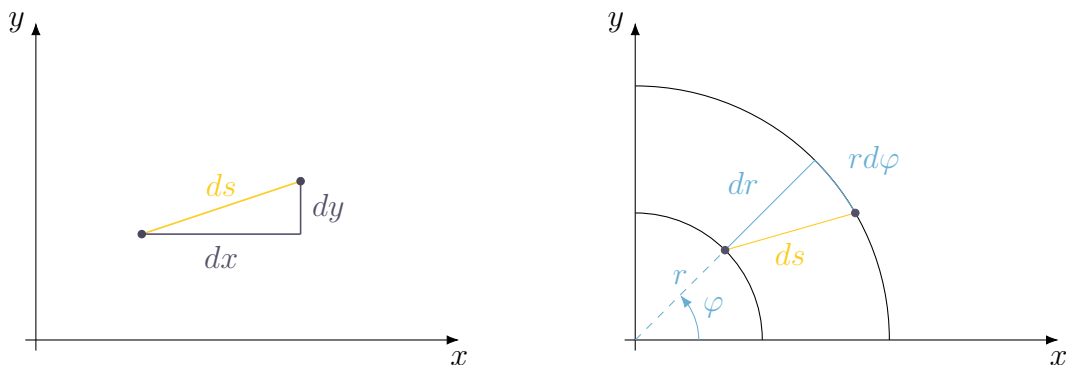
Заметим, что в случае неперпендикулярных осей расстояние будет определяться по теореме косинусов:

$$ds^2 = da^2 + db^2 + 2dadbcos\alpha,$$

где α — угол между осями a и b .

Декартова система координат — это не единственный способ задать положение точки на плоскости. Существует множество других вариантов, например полярные координаты, в которых положение точки задается расстоянием от начала координат r и углом φ , отсчитанным от некоторой оси (см. рисунок). При переходе к полярным координатами расстояние будет иметь вид:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2.$$



Постулаты СТО

В основе специальной теории относительности лежат следующие постулаты:

1. **Законы физики одинаковы во всех инерциальных системах отсчёта.**
2. **Скорость света в вакууме постоянна.**

Первый постулат понятен — мы предполагаем, что процессы во всех инерциальных системах отсчёта (ИСО) протекают одинаково, поэтому и физические законы записываются одинаковым образом.

Второй же выглядит весьма удивительным, но именно он является отправной точкой построения СТО. Факт постоянства скорости света был подтвержден в различных экспериментах, проведенных во второй половине XIX века (опыты Физо, Майкельсона-Морли и др.).

Преобразования Галилея и Лоренца

В этом разделе мы будем рассматривать переход из одной ИСО K в другую ИСО K' .

Рассмотрим движение материальной точки из начала координат вдоль оси x со скоростью v . При переходе из лабораторной системы отсчёта в систему отсчета этой точки координаты и время преобразуются по закону

$$x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t.$$

Эти преобразования называется преобразованиями Галилея. Из них следует, что скорости в этой системе отсчета равны

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'} = v_x - v, \quad v'_y = \frac{dy'}{dt'} = v_y, \quad v'_z = \frac{dz'}{dt'} = v_z.$$

Такой закон преобразования скоростей противоречит второму постулату СТО. Подтвердим это одним классическим примером. Представьте, что человек бежит с фонариком в руке. Тогда в системе отчёта, связанной с бегущим человеком, фотоны (или электромагнитная волна) имеют скорость, равную скорости света вакууме (в дальнейшем будем обозначать её c , численное значение будем считать примерно равным $3 \cdot 10^8$ м/с). В системе отсчета, связанной с неподвижным наблюдателем, согласно Галилеевским преобразованиям, свет должен был бы иметь скорость $c + u$, где u — скорость бегущего человека, что противоречит второму постулату СТО, согласно которому эта скорость должна быть равна c .

Найдем преобразование координат и времени при которых скорость света не будет изменяться при переходе из одной ИСО в другую (для удобства эти ИСО будем называть K и K'). Поскольку в любой ИСО зависимость $x(t)$ для точки, которая движется с постоянной скоростью, линейна, то эти преобразования должны переводить прямые в прямые, т. е. быть линейными. В общем случае такие преобразования имеют вид:

$$\begin{cases} x' = Ax + Bt, \\ t' = Cx + Dt. \end{cases}$$

- 1.1. (0 баллов) Пользуясь тем, что зависимость координаты фотона от времени в двух разных ИСО K и K' записывается в виде $x = ct$ и $x' = ct'$, найдите явный вид преобразований, сохраняющих скорость света (они называются преобразованиями Лоренца):

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - vt), \\ t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right), \end{cases}$$

где $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ — релятивистский «гамма-фактор», а v — скорость движения K' относительно K .

Замечание 1. В этом примере мы рассматривали движение только вдоль оси x , поэтому координаты по осям y и z будут иметь вид: $y' = y$, $z' = z$.

Замечание 2. Видно, что в классическом (нерелятивистском) пределе, когда $v/c \ll 1$, преобразования Лоренца совпадают с преобразованиями Галилея.

Замечание 3. Из выражения для «гамма-фактора» следует, что система отсчета, движущаяся со скоростью больше скорости света, неприемлема в такой теории и не имеет физического смысла. Таким образом, можно заключить, что скорость света в вакууме — это не просто константа, а максимальная разрешенная скорость движения любых частиц.

Используя тот факт, что при обратном переходе из K' в K изменяется только знак у скорости v видно, что обратное преобразование Лоренца имеет вид:

$$\begin{cases} x = \gamma(x' + vt'), \\ t = \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right), \end{cases}$$

- 1.2. (0 баллов) Рубрика Хоббит туда и обратно. Убедитесь, что последовательно применяя два преобразования Лоренца для переходов $K \rightarrow K' \rightarrow K$ мы получаем тождественные преобразования координат и времени.

Рассмотрим движение одной и той же материальной точки вдоль оси абсцисс в двух ИСО K и K' . Записывая преобразование Лоренца для двух моментов времени и вычитая из одной системы уравнений другую мы получим:

$$\begin{cases} dx' = \gamma(dx - vdt), \\ dt' = \gamma\left(dt - \frac{v}{c^2}dx\right), \\ dy' = dy, \\ dz' = dz. \end{cases}$$

Пространство-время Минковского

Теперь, когда мы выяснили, что при преобразованиях Лоренца время, как и пространственные координаты, преобразуется нетождественно, имеет смысл объединить их в одно пространство-время Минковского, координаты точек которого имеют вид (ct, x, y, z) .

- 1.3. (0,2 балла) Нарисуйте и опишите, как при преобразованиях Лоренца при движении только вдоль оси x изменяются координатные оси ct и x .

В пространстве-времени Минковского каждая точка является *событием*, произошедшем на некоторой пространственной координате в некоторый момент времени. Расстояние между двумя событиями в пространстве-времени Минковского называется *интервалом* и вычисляется следующим образом:

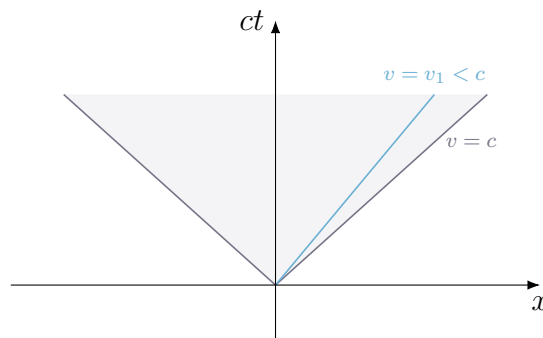
$$ds^2 = g_{tt}c^2dt^2 + g_{xx}dx^2 + g_{yy}dy^2 + g_{zz}dz^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2.$$

Набор коэффициентов g_{tt} , g_{xx} , g_{yy} , g_{zz} будем называть *метрикой*.

- 1.4. (0,2 балла) Покажите что преобразования Лоренца не изменяют интервал пространства-времени Минковского (говорят, что такие преобразования являются изометриями метрики).

Квадрат интервала между двумя событиями может быть любого знака. Рассмотрим события $(0,0)$ и (ct, x) и интервал ds между ними.

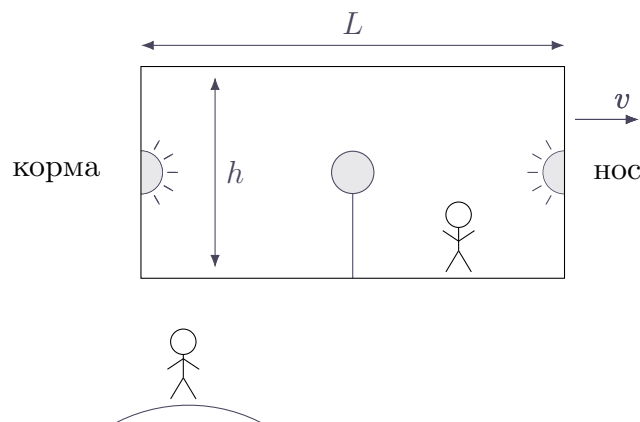
- События, для которых $ds^2 = 0$, лежат на световом конусе. Эти события соответствуют тому, что фотон, выпущенный из $(0,0)$, оказался в точке с пространственной координатой x в момент времени t . Такой интервал ds называется *светоподобным*.
- События, для которых $ds^2 < 0$, лежат снаружи светового конуса. Такой интервал называется *пространственноподобным*.
- События, для которых $ds^2 > 0$, лежат внутри светового конуса. Такой интервал называется *временноподобным*. Частицы в пространстве Минковского движутся по кривым, для которых для любого маленького участка $ds^2 > 0$. Такие кривые называются *мировыми линиями*.



Эффекты релятивистской кинематики

Рассмотрим несколько примеров, которые продемонстрируют нам особенности преобразований Лоренца.

- 1.5. (0,3 балла) Пусть ракета летит в космическом пространстве со скоростью $v = c/2$. Внутренний салон ракеты имеет форму прямоугольного параллелепипеда, в центрах «носа» и «кормы» которого установлены источники света. Происходят короткие вспышки этих источников одновременно по часам космонавта, находящегося в ракете. Найдите промежуток времени между детектированием вспышек приёмником, расположенным в центре салона в системе отсчёта наблюдателя, находящегося на неподвижной планете. В этой же системе отсчёта найдите промежуток времени между испусканиями вспышек источниками. Расстояние от «носа» до «кормы» в системе отсчёта ракеты равно L .



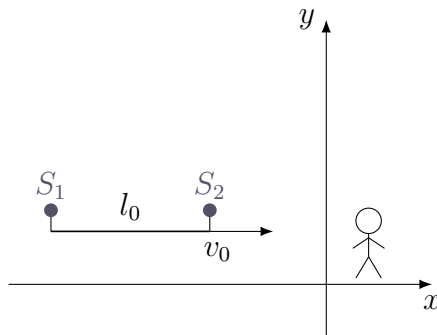
- 1.6. (0,3 балла) Изобразите события детектирования и испускания света в системах отчёта космонавта и наблюдателя на планете в координатах пространства-времени Минковского.
- 1.7. (0,3 балла) Как для этих двух наблюдателей связаны времена, за которые свет, испускаемый из «кормового» источника впервые достигнет «пола» ракеты, если расстояние от него до потолка равно h ?

Теперь рассмотрим один жизненный пример из мира физики частиц.

- 1.8. (0,3 балла) В атмосфере на высоте порядка 10 км над поверхностью Земли родился мезон. Его собственное время жизни (собственными для данного объекта называются величины, измеренные в связанной с ним системе отсчёта) составляет примерно 2,2 мкс. Оцените, к какой скоростью должен двигаться мезон для того, чтобы достичь детектора на поверхности Земли.

И ещё немного более абстрактных примеров.

- 1.9. (0,5 балла) Стержень имеет собственную длину l_0 . На концах стержня укреплены две лампочки S_1 и S_2 . Стержень движется со скоростью v_0 по направлению к неподвижному наблюдателю. Лампа S_1 испускает свет раньше, чем S_2 , так что обе вспышки достигают наблюдателя одновременно. В моменты испускания света лампы S_1 и S_2 находились в точках x_1 и x_2 соответственно. Какое расстояние $x_1 - x_2$ между лампочками измерит наблюдатель? (Это будет видимая длина стержня, как она воспринимается глазом человека или фиксируется фотоаппаратом.)



- 1.10. (0,4 балла) Из начала отсчета ИСО K вдоль оси x через промежуток времени T (по часам K) посылаются кратковременные световые импульсы. Найдите промежуток времени между моментами регистрации этих сигналов наблюдателем, если он находится в ИСО K' , движущейся навстречу системе K со скоростью $v = c/2$.

Парадокс близнецов

- 1.11. (0,2 балла) Космический корабль вылетает с Земли со скоростью βc в момент времени $t_0 < 0$ (по земным часам), где β — известная постоянная величина. На Земле остался брат-близнец капитана корабля. В момент времени $t_0/2$ по земным часам космический корабль производит быстрый разворот и возвращается на Землю со скоростью, равной начальной. Проанализируйте движение космонавта в системе отсчёта земного наблюдателя и покажите, что собственное время космонавта, прошедшее за время его путешествия, меньше, чем собственное время его брата (другими словами, близнец-космонавт постарел меньше).

Обратите внимание, что аналогичные рассуждения можно провести с точки зрения движущегося брата, который считает себя неподвижным, а земного наблюдателя — движущимся относительно него с той же скоростью. Тогда получится противоположная ситуация, что меньше постарел брат, находящийся на Земле. Объясните на качественном уровне, как разрешить такой парадокс, и чему на самом деле приблизительно равна разница собственных времён двух близнецов (укажите, кто из них будет старше на момент завершения путешествия).

- 1.12. (0,8 балла) Космический корабль вылетает с Земли со скоростью $v = \beta c$ в момент времени $t_0 < 0$ по часам Земли, где β — известная постоянная величина. На Земле остался брат-близнец капитана корабля. В момент времени $t_0/2$ (по своим часам) он видит световой сигнал от корабля о том, что корабль начинает разворачиваться. Во время разворота мировая линия корабля — это часть гиперболы (в системе отсчета Земли)

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{c^2 t^2}{a^2} = 1.$$

Здесь параметры a и x_0 не известны, c — скорость света. После разворота корабль движется с постоянной скоростью $-v$. Найдите, на сколько будет отличаться возраст близнецов, когда корабль вернется на Землю. Считайте, что скорость корабля меняется непрерывно на всей его мировой линии. Участками мировой линии, на которых корабль разгоняется и тормозит вблизи Земли можно пренебречь.

Вам может пригодиться интеграл

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}} = \ln \left(\frac{b + \sqrt{b^2 + 1}}{a + \sqrt{a^2 + 1}} \right).$$

Импульс и энергия

Рассмотрим четырёхмерное пространство-время Минковского с координатами (ct, x, y, z) . Для единообразия записи можно объединить эти координаты в один 4-вектор:

$$X = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ \mathbf{r} \end{pmatrix}.$$

Ранее уже было сказано, что собственное время для какой-либо движущейся со скоростью v системы отсчёта — это время $d\tau$, измеренное по часам, связанным с этой системой. Используя преобразование Лоренца, можно получить связь $d\tau$ и dt , измеренного по часам неподвижной системы:

$$dt = \frac{d\tau}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \gamma d\tau.$$

Вынося dt из под знака корня в выражении для интервала, получим:

$$ds = \sqrt{c^2 dt^2 - dr^2} = c dt \sqrt{1 - v^2/c^2} = c d\tau,$$

где $dr^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ — пространственная часть интервала. Таким образом мы обнаружили очень удобную связь: интервал, который является аналогом пути в пространстве-времени, можно параметризовать собственным временем частицы.

Определим вектор 4-скорости следующим образом:

$$U = \frac{d}{d\tau} \begin{pmatrix} ct \\ \mathbf{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c dt/d\tau \\ d\mathbf{r}/d\tau \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} c \\ \mathbf{v} \end{pmatrix},$$

а также 4-импульса частицы:

$$P = mU = \begin{pmatrix} \gamma mc \\ \gamma m\mathbf{v} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим выражение для временной компоненты 4-импульса и преобразуем его для случая малых скоростей ($v/c \ll 1$):

$$P_t = \frac{mc}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = mc + \frac{mv^2}{2c} + \dots \approx \frac{1}{c} \left(mc^2 + \frac{mv^2}{2} \right).$$

Выражение в скобках совпадает с кинетической энергией *массивных частиц* с некоторой фиксированной добавкой. Поэтому скажем, что это и есть определение релятивистской энергии таких частиц ($E = \gamma mc^2$):

$$P_t = E/c \quad \Longrightarrow \quad P = \begin{pmatrix} E/c \\ \mathbf{p} \end{pmatrix}.$$

1.13. (0 баллов) По аналогии с интервалом найдите «длину» 4-импульса.

1.14. (0 баллов) Существуют частицы у которых масса m равна нулю. Они называются *безмассовыми*. Используя результат предыдущего пункта, выразите энергию E таких частиц через их импульс.

2 Классическая черная дыра

В предыдущем разделе вы познакомились с постулатами Специальной Теории Относительности. Оказывается, что одним из прямых ее следствий является возможность существования особых объектов – черных дыр, обладающих свойством неизбежно «поглощать» любую, достаточно близко расположенную материю. В данном разделе вам предлагается провести собственное исследование подобного объекта.

При продолжительном наблюдении за положением звезды около центра галактики было выяснено, что она совершает периодическое движение в поле тяжести некоторого массивного объекта. Считайте известным, что расстояние от точки наблюдения до центра галактики равно $\approx 26 \cdot 10^3$ световых лет, период обращения звезды по ее траектории равен ≈ 16 лет, а плоскость, в которой происходит движение звезды, перпендикулярна направлению наблюдения.

- 2.1. (0,3 балла) Используя экспериментальные данные определите возможные положения притягивающего звезду объекта в предложенных в задаче координатах.
- 2.2. (0,4 балла) Используя экспериментальные данные определите массу притягивающего звезду объекта.
- 2.3. (0,8 балла) Считая притягивающий звезду объект сферически симметричным, а его размер достаточно малым, определите границы области вокруг такого объекта из которой ни один сигнал не может достичь удалённого наблюдателя.

Таблица 1: Координаты наблюдения звезды

$x, '' \cdot 10^3$	–36	–34	–31	–27	–21	–15	–8	–1	9	17	24	32	39
$y, '' \cdot 10^3$	122	132	143	153	164	172	178	182	185	184	181	175	167

Экспериментальные данные приведены в ортогональной системе координат, каждая из осей которой имеет размерность угловых секунд (") и является мерой угла отклонения точки от начала координат.

В работе разрешается использовать численные методы анализа экспериментальных данных, а определяемые из них параметры должны быть получены с точностью $5 \cdot 10^{-3} (")$.

3 ОТО

Теоретический минимум

На данный момент наиболее точной теорией классической гравитации является общая теория относительности (ОТО). Основная идея ОТО заключается в том, что гравитационное взаимодействие — это следствие искривления пространства-времени. «Искривление» означает, что метрика g^1 в ОТО зависит от точки пространства-времени:

$$ds_{\text{ОТО}}^2 = g_{tt}(\mathbf{r}, t)dt^2 + \sum_{i=1}^3 2g_{ti}(\mathbf{r}, t)dt dx^i + \sum_{i,j=1}^3 g_{ij}(\mathbf{r}, t)dx^i dx^j \quad (1)$$

в отличие от СТО, где

$$ds_{\text{СТО}}^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \quad (2)$$

Заметим, что если координаты нумеруются индексом i , dx^i означает не dx в степени i , а малое изменение i -й координаты. Например, $(x, y, z) = (x^1, x^2, x^3)$, тогда если $i = 1$, $dx^i = dx$, если $i = 2$, $dx^i = dy$, если $i = 3$, $dx^i = dz$ ². В дальнейшем мы также будем писать например g_{rr} , как будто $i = r$, имея в виду, что это множитель при dr^2 . Здесь уже dr^2 означает квадрат dr .

Метрику g можно найти из уравнения Эйнштейна. Для полноты картины приведем его:

$$R_{\mu\nu} - \frac{R}{2}g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}. \quad (3)$$

Правая часть этого уравнения определяется тем, как распределена и движется материя в задаче. Левая часть вычисляется по метрике g .

Чтобы работать было удобнее, мы будем пользоваться системой единиц, в которой скорость света равна единице: $c = 1$. Это приводит к тому, что размерности dt и dx теперь совпадают, а собственное время $d\tau$ совпадает с длиной мировой линии ds .

Нас будет интересовать движение пробных частиц в вакууме в гравитационном поле сферически симметричного объекта массой M , расположенного в начале координат. Такими объектами могут быть например планета, звезда, черная дыра. Так как мы рассматриваем движение в вакууме и не учитываем гравитационное поле частиц, правая часть уравнения (3) в интересующей нас области пространства-времени равна нулю. Так как массивный объект сферически симметричен, мы будем рассматривать сферически-симметричное решение уравнения (3), называемое решением Шварцшильда. Оказывается, что оно единственно и имеет вид:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta \cdot d\varphi^2). \quad (4)$$

Параметр r_g называется радиусом Шварцшильда. Как мы увидим в дальнейшем, он определяется только массой M .

¹Под g имеется в виду набор функций $g_{tt}, g_{tx}, g_{ty}, g_{tz}, g_{xx}, g_{yy}, g_{zz}, g_{xy}, g_{xz}, g_{yz}$. В сферической системе координат в индексах будут (r, φ, θ) вместо (x, y, z)

²Для декартовых координат (x, y, z) квадрат интервала равен $ds^2 = g_{tt}(\mathbf{r}, t)dt^2 + 2g_{tx}(\mathbf{r}, t)dxdt + 2g_{ty}(\mathbf{r}, t)dydt + 2g_{tz}(\mathbf{r}, t)dzdt + g_{xx}(\mathbf{r}, t)dx^2 + g_{yy}(\mathbf{r}, t)dy^2 + g_{zz}(\mathbf{r}, t)dz^2 + 2g_{xy}(\mathbf{r}, t)dxdy + 2g_{xz}(\mathbf{r}, t)xdz + 2g_{yz}(\mathbf{r}, t)dydz$.

3.1. (0 баллов) Чему равны g_{tt} , g_{rr} , $g_{\theta\theta}$, $g_{\varphi\varphi}$, g_{tr} , $g_{t\theta}$, $g_{t\varphi}$, $g_{r\theta}$, $g_{r\varphi}$, $g_{\theta\varphi}$ в обозначениях уравнения (1) для метрики (4)?

Если углы θ и φ постоянны, т. е. если нас интересует только радиальное движение, другими словами движение в плоскости (t, r) , это решение упрощается:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)}. \quad (5)$$

В ОТО для описания движения частиц используются законы, аналогичные принципу Ферма, который описывает движение света в пространстве с заданным $n(x, y)$. Опишем эти законы.

Движение свободной частицы массой m в искривленном пространстве-времени определяется принципом наименьшего действия: частица движется из точки A в точку B по мировой линии γ , которая минимизирует³ интеграл, называемым *действием* S_γ ⁴:

$$S_\gamma = - \int_\gamma m ds. \quad (6)$$

Видно, что действие для свободной частицы с точностью до множителя равно длине мировой линии γ в пространстве-времени с метрикой g .

Такой способ задавать мировую линию (траекторию) частицы должен напоминать принцип Ферма в геометрической оптике (см. 3 эпизод 10-11 класс). Действительно, квадрат оптического пути равен

$$ds^2 = n^2 dl^2 = n(x, y)^2 dx^2 + n(x, y)^2 dy^2.$$

Это совпадает с (1) в двух пространственных измерениях. При этом все компоненты g_{ij} одинаковы и равны n^2 .

Из (6) можно вывести уравнение для $\mathbf{r}(\tau)$, $t(\tau)$. Решения этого уравнения называются *геодезическими*. Можно показать, что существует три класса геодезических:

- *Времениподобные геодезические*: в любой точке $ds^2 > 0$;
- *Светоподобные геодезические*: в любой точке $ds^2 = 0$;
- *Пространственноподобные геодезические*: в любой точке $ds^2 < 0$;

Времениподобные геодезические являются мировыми линиями массивных частиц. Нас также будут интересовать светоподобные геодезические (как не сложно догадаться, по ним распространяется свет). Они могут быть получены из времениподобных в пределе $m \rightarrow 0$. Это соответствует тому, что у частиц света, фотонов, масса m равна нулю.

Мы, однако, не будем явно решать уравнение геодезической. Вместо этого мы найдем мировые линии частиц, пользуясь симметриями действия (6).

³или максимизирует

⁴Заглавной буквой S_γ всегда будем обозначать действие на кривой γ , а строчной буквой s_γ — длину γ .

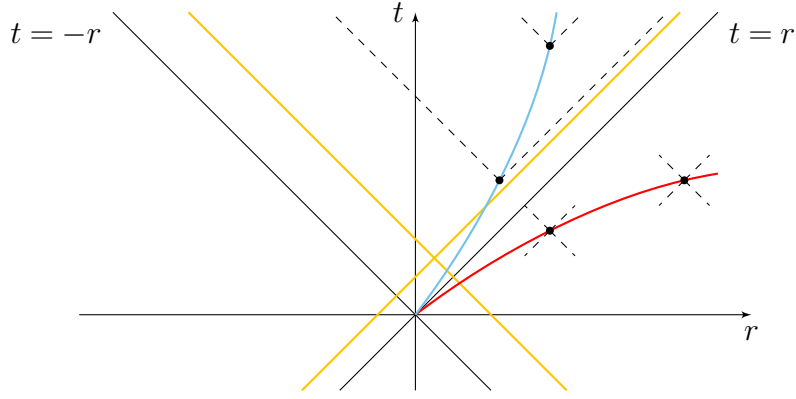
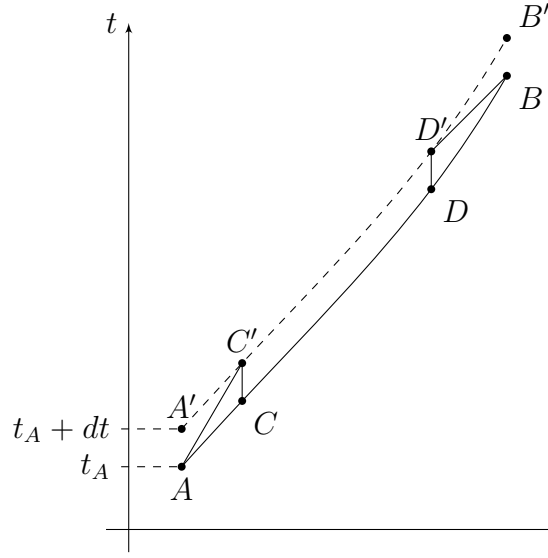


Рис. 1: Светоподобные, времениподобные и пространственноподобные геодезические в пространстве Минковского (2).

Движение в плоскости (t, r)

Рассмотрим движение частицы известной массой m в плоскости (t, r) в пространстве-времени с метрикой (5) с известным радиусом Шварцшильда r_g . Пусть $ACDB$ — мировая линия частицы, а кривая $A'C'D'B'$ получена из нее трансляцией на dt , т.е. $t_{A'} - t_A = t_{B'} - t_B = t_{C'} - t_C = t_{D'} - t_D = dt$ (см. рисунок). Считайте известными координаты точек A, B, C, D , а также что $dt \ll s_{AC}/(t_C - t_A), s_{BD}/(t_B - t_D)$.



Выберем точки C, A и B, D близкими друг к другу, так что будем считать AC, BD отрезками. Это значит, например, что $S_{AC} = -m\Delta s_{AC} = -m\sqrt{g_{tt}(t_C - t_A)^2 + g_{rr}(r_C - r_A)^2}$.

- 3.2. (0,2 балла) Найдите разложение⁵ $S_{AC'} - S_{AC}$ до первого порядка по dt .
- 3.3. (0,2 балла) Найдите разложение $S_{BD'} - S_{BD}$ до первого порядка по dt .
- 3.4. (0,2 балла) Найдите $S_{CD} - S_{C'D'}$.
- 3.5. (0 баллов) Так как $ACDB$ минимизирует (6), первый порядок в разложении $S_{ACDB} - S_{A'C'D'B'}$ должен равняться нулю. Получите из этого условия закон сохранения.

⁵См. нулевой хинт к 3 эпизоду 10-11 класса.

Как известно из СТО, релятивистское выражение для энергии частицы имеет вид

$$E = \gamma mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = mc^2 \frac{cdt}{\sqrt{c^2 dt^2 - dx^2}}.$$

Записанное в таком виде выражение обобщить на случай ОТО:

$$E = \frac{mg_{tt}dt}{\sqrt{g_{tt}dt^2 + g_{rr}dr^2}} = mg_{tt} \frac{dt}{ds} \quad (7)$$

Из пункта 3.5 видно, что определенная таким образом энергия сохраняется, т. е. не зависит от того, в какой точке мировой линии её вычислить. Проверим корректность предельных переходов. Для этого рассмотрим случай малых $v_0 = dr/dt$ и r_g/r_0 . Для этого случая находим:

$$E(v_0, r_0) \approx m + \frac{mv_0^2}{2} - \alpha \frac{r_g}{r_0}. \quad (8)$$

Полученное выражение (8) с точностью до добавления константы должно совпадать с энергией частицы в гравитационном поле тела массой M , известной из теории гравитации Ньютона.

3.6. (0,1 балла) Найдите α , разложив (7) до первого порядка по v_0^2 и r_g/r_0 . Сверив результат с результатом Ньютона, выразите r_g через массу M и гравитационную постоянную G .

Решим уравнение (7) относительно t :

$$E = mg_{tt} \frac{dt}{ds} \implies m^2 g_{tt}^2 dt^2 = E^2 (g_{tt} dt^2 + g_{rr} dr^2), \implies dt = \pm \sqrt{-\frac{g_{rr}}{g_{tt}}} \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{m^2}{E^2} g_{tt}}}.$$

Получаем уравнение мировой линии $t(r, E)$:

$$t(r, E) - t_0 = \pm \int_{r_0}^r \frac{dr}{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \sqrt{1 - \frac{m^2}{E^2} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)}}. \quad (9)$$

Падение в черную дыру

Пусть наш массивный объект является черной дырой. Это значит, что масса M сосредоточена внутри *горизонта событий* $r = r_g$, при этом ее распределение внутри него неизвестно, но мы будем считать, что вся масса M находится в начале координат. Отсюда следует, что мы можем пользоваться⁶ полученным уравнением мировой линии (9) для $r \geq r_g$, а может и при $r < r_g$. Изучим свойства полученных мировых линий (9). Для удобства запишем также выражение для скорости частицы:

$$v = \frac{dr}{dt} = \pm \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \sqrt{1 - \frac{m^2}{E^2} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)}. \quad (10)$$

Рассмотрим частицу, которая летит от черной дыры в области $r > r_g$ (знак «+» в формуле (10)).

⁶Напомним, что метрика (1) получена для вакуума, т. е. когда никакой материи в области движения нет.

3.7. (0,1 балла) При каких E частица не улетит на бесконечность, а развернется?

3.8. (0,2 балла) Пусть энергия частицы E такова, что она не улетит на бесконечность. На какое максимальное расстояние $r_{\max}$ она улетит?

Рассмотрим теперь движение частицы после разворота (знак « $-$ » в формуле (10)). При таком движении r уменьшается и приближается к r_g . Чтобы понять, что происходит с $t(r, E)$ при $r \rightarrow r_g$, нам понадобится следующий математический факт:

$$\int_{x_0}^x \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln \frac{ax+b}{ax_0+b}, \quad \int_{x_0}^x \frac{1}{x^\alpha} dx = \frac{1}{(\alpha-1)x^{\alpha-1}} - \frac{1}{(\alpha-1)x_0^{\alpha-1}}, \quad \text{где } \alpha \neq 1. \quad (11)$$

Отсюда видно, что первый интеграл расходится (т.е. стремится к бесконечности) при $x \rightarrow -b/a$, а второй интеграл имеет конечный предел $1/((\alpha-1)x_0^{\alpha-1})$ при $\alpha < 1$.

Из этого математического факта следует, что время падения на горизонт $t(r_g, E)$ (см. (9)) равно бесконечности. Это верно даже для светоподобных геодезических, т.е. когда $m = 0$. Поэтому сторонний наблюдатель никогда не увидит, что частица достигла горизонта черной дыры. Значит ли это, что частица не достигнет горизонта событий? Чтобы ответить на этот вопрос, нужно вычислить собственное время частицы:

3.9. (0,2 балла) Найдите изменение собственного времени частицы $\tau(r, E) - \tau_0$.

3.10. (0 баллов) Убедитесь, что $\tau(r_g, E)$ конечно.

Так как $\tau(r_g, E)$ конечно, частица долетит до горизонта событий и пролетит сквозь него. Но так как $t(r_g, E)$ бесконечно, чтобы описать её мировую линию, нам нужно сменить систему отсчета, т.е. сделать замену координат. Выберем новую координату для времени: $(t, r) \rightarrow (x^+, r)$, где

$$x^+ = \begin{cases} t + r + r_g \ln \left(\frac{r}{r_g} - 1 \right), & r > r_g \\ t + r + r_g \ln \left(1 - \frac{r}{r_g} \right), & 0 < r < r_g. \end{cases} \quad (12)$$

3.11. (0,2 балла) Выразите ds^2 (см. уравнение (5)) через dx^+ и dr . Для этого выразите dt из уравнения (12) через dx^+ и dr .

3.12. (0,5 балла) Найдите уравнения светоподобных геодезических в координатах (x^+, r) .

3.13. (0,3 балла) Постройте графики всех видов получившихся светоподобных геодезических на одной плоскости (t', r) , $t' = x^+ - r$.

В каждой точке плоскости (t', r) пересекаются две светоподобные геодезические. Мировые линии частиц должны лежать внутри светового конуса (там, где $ds^2 > 0$) с вершиной в этой точке (t', r) . Из полученных результатов видно, что никакая частица, даже свет, не может выйти за горизонт событий изнутри него.

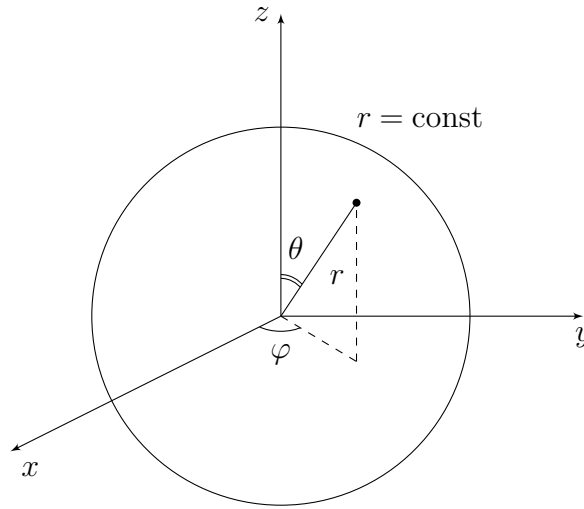
Наконец, заметим, что из полученной вами в пункте 3.9 формулы для собственного времени видно, что $\tau(0, E)$ конечно. Это значит, что частица за конечное собственное время достигнет сингулярности в центре черной дыры.

Общий случай движения частицы в метрике Шварцшильда

Рассмотрим теперь общий случай движения частицы массой m в метрике (4) в области $r > r_g$. Как и раньше, соответствующее действие (6) не меняется при трансляциях по времени, поэтому энергия сохраняется:

$$E = mg_{tt} \frac{dt}{ds} = \text{const}. \quad (13)$$

У действия (6) есть еще сферическая симметрия. Из-за неё движение частицы в пространстве (x, y, z) будет происходить в одной плоскости. Без ограничения общности можно считать, что движение происходит в плоскости $(x, y, 0)$.



С точки зрения координат (r, θ, φ) это означает, что $\theta = \pi/2$. Тогда метрика (4) упрощается:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)} - r^2 d\varphi^2. \quad (14)$$

У действия с такой метрикой сохранилась только часть сферической симметрии: симметрия относительно поворотов вокруг нормали к плоскости движения частицы. С точки зрения координат это означает инвариантность при сдвиге $\varphi \rightarrow \varphi + d\varphi$.

3.14. (0,6 балла) Выведите закон сохранения, соответствующий этой симметрии (например, проведите рассуждение аналогичное 3.2-3.5).

Чтобы зафиксировать нормировку, напомним, что в аналогичной задаче в Ньютонской гравитации есть закон сохранения момента импульса J_H . Чтобы определить момент импульса, разложим скорость на радиальную и угловую компоненты:

$$v^2 = v_r^2 + v_\varphi^2, \quad \text{где} \quad v_r = \frac{dr}{dt}, \quad v_\varphi = r \frac{d\varphi}{dt}.$$

Тогда $J_H = mrv_\varphi$. Обозначим получившуюся в пункте (3.14) сохраняющуюся величину как J . Выберем нормировку J так, чтобы в пределе малых r_g/r и v получалось J_H :

$$J = mr^2 \frac{d\varphi}{ds}.$$

Чтобы задать мировую линию частицы, нужно связать t , φ , r и параметры E, J . Будем параметризовать мировую линию через r , тогда уравнение мировой линии — это

$t(r, E, J)$, $\varphi(r, E, J)$. Массу частицы m , радиус Шварцшильда r_g и начальную координату r_0 считайте известными.

3.15. (0,1 балла) Найдите $t(r, E, J) - t_0$.

3.16. (0,1 балла) Найдите $\varphi(r, E, J) - \varphi_0$.

В обоих этих пунктах должно получиться выражение в виде интеграла, аналогичное (9).

Проанализируем полученные уравнения.

3.17. (0,3 балла) Сколько типов мировых линий есть при $J = 0,9mr_g$? Опишите движение частиц по таким мировым линиям. Ответ обоснуйте.

3.18. (0,3 балла) Сколько типов мировых линий есть при $J = 1,9mr_g$? Опишите движение частиц по таким мировым линиям. Ответ обоснуйте.

3.19. (0,3 балла) Сколько типов мировых линий есть при $J = 2,9mr_g$? Опишите движение частиц по таким мировым линиям. Ответ обоснуйте.

3.20. (0,3 балла) Найдите с точностью до 0,01 граничные значения $J/(mr_g)$, при пересечении которых меняются возможные типы траекторий.

Смещение перигелия Меркурия

Напомним, как происходит движение точки в гравитационном поле тела массой M в теории Ньютона. Закон движения можно найти, используя закон сохранения энергии:

$$E_H = \frac{mv^2}{2} - \frac{GmM}{r} = \text{const}.$$

Так как помимо энергии сохраняется также момент импульса $J_H = mrv_\varphi = \text{const}$, удобно переписать ЗСЭ через J_H :

$$E_H = \frac{mv_r^2}{2} - \frac{GmM}{r} + \frac{J_H^2}{2mr^2} = \text{const}.$$

Используя два закона сохранения легко получить уравнение мировой линии в Ньютонском приближении:

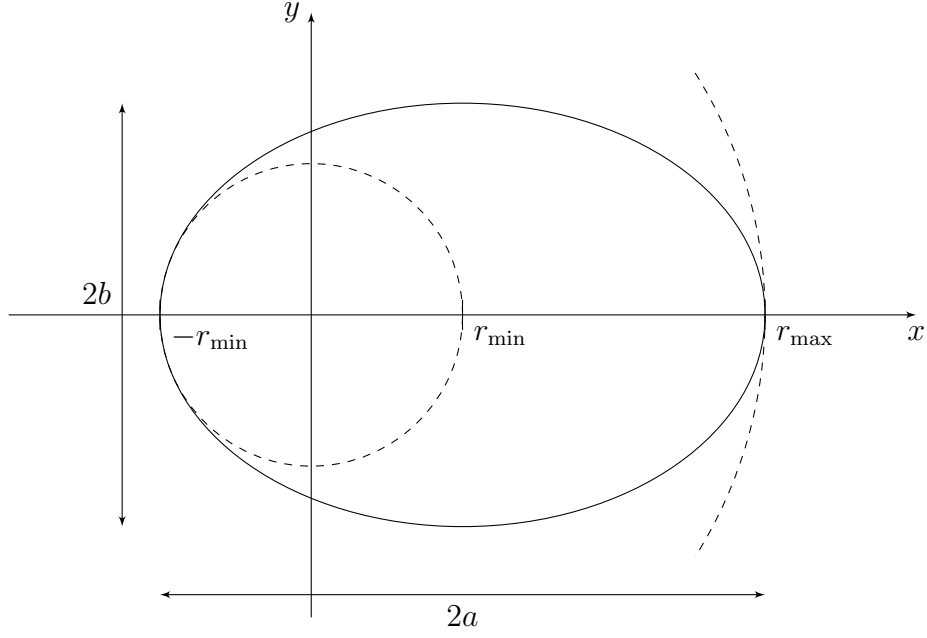
$$t_H(r, E_H, J_H) - t_0 = \pm m \int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{2mE_H + \frac{2Gm^2M}{r} - \frac{J_H^2}{r^2}}} \quad (15)$$

$$\varphi_H(r, E_H, J_H) - \varphi_0 = \pm J_H \int_{r_0}^r \frac{1}{r^2} \frac{dr}{\sqrt{2mE_H + \frac{2Gm^2M}{r} - \frac{J_H^2}{r^2}}} \quad (16)$$

Как известно из законов Кеплера (это также можно легко получить из (16)), если $E_H < 0$, уравнение в (16) задает эллипс с фокусом в начале координат. Уравнение такого эллипса имеет вид

$$r_H(\varphi) = \frac{p_H}{1 - e_H \cos \varphi},$$

где $e_H = \sqrt{1 - b^2/a^2}$ — эксцентриситет, $p_H = b^2/a$, a — большая полуось, b — малая полуось (См. [википедию](#)).



Из (16) легко видеть, что

$$e = \sqrt{1 + \frac{2E_H J_H^2}{G^2 M^2 m^3}}, \quad p = \frac{J_H^2}{G m^2 M}, \quad a = -\frac{G m M}{2E_H}, \quad b = \frac{J_H}{\sqrt{-2E_H m}}.$$

Уравнение (16) имеет вид

$$\varphi_H(r, E_H, J_H) - \varphi_0 = \pm J_H \int_{r_0}^r \frac{1}{r^2} \frac{dr}{\sqrt{f_H(r, E_H, J_H)}}, \quad \text{где} \quad f_H(r, E_H, J_H) = 2mE_H + \frac{2Gm^2 M}{r} - \frac{J_H^2}{r^2}.$$

Если точка делает один оборот по траектории, т. е. r меняется от $r_{\min}$ до $r_{\max}$ и обратно, то угол изменяется на 2π :

$$2J_H \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{1}{r^2} \frac{dr}{\sqrt{f_H(r, E_H, J_H)}} = 2\pi. \quad (17)$$

Уравнение, полученное в пункте 3.16, имеет похожий вид:

$$\varphi(r, E, J) - \varphi_0 = \pm J \int_{r_0}^r \frac{1}{r^2} \frac{dr}{\sqrt{f(r, E, J)}}$$

Мы хотим получить поправку к результату (17) из общей теории относительности. Для этого рассмотрим движение частицы с энергией $E = m + \mathcal{E}$, и моментом импульса J . Будем считать, что

$$\frac{|\mathcal{E}|}{m} \sim \frac{J^2}{m^2 r^2} \sim v^2 \sim \frac{r_g}{r} \ll 1, \quad (18)$$

т. е. это малые величины одного порядка.

Можно показать, что с точностью до второго порядка (т. е. с точностью до квадратов и произведений величин (18)) имеет место равенство

$$f(m + \mathcal{E}, J, r) = f_H(\tilde{\mathcal{E}}, \tilde{J}, \tilde{r}), \quad (19)$$

где $\tilde{\mathcal{E}} = \mathcal{E}(1 + \delta_{\mathcal{E}})$, $\tilde{J}^2 = J^2(1 - \delta_J)$, $\tilde{r} = r + \delta_r$. Поправки $\delta_{\mathcal{E}}$, δ_J , δ_r , не зависят от r , и это малые величины порядка $\delta_{\mathcal{E}} \sim \delta_J/J^2 \sim \delta_r/r \sim \mathcal{E}/m$. Их можно найти, разложив разность $f(m + \mathcal{E}, J, r) - f_{\text{H}}(\tilde{\mathcal{E}}, \tilde{J}, \tilde{r})$ до второго порядка малости и приравняв к нулю все оставшиеся коэффициенты при степенях r .

3.21. (0,2 балла) Найдите δ_E .

3.22. (0,2 балла) Найдите δ_J .

3.23. (0,2 балла) Найдите δ_r .

Используя (19), можно найти интересующую нас поправку:

$$\begin{aligned} \Delta\varphi_{\text{gr}} - 2\pi &= 2 \int_{r_{\text{gr},\min}}^{r_{\text{gr},\max}} \frac{J}{r^2} \frac{dr}{\sqrt{f(r, m + \mathcal{E}, J)}} - 2 \int_{\tilde{r}_{\min}}^{\tilde{r}_{\max}} \frac{\tilde{J}}{\tilde{r}^2} \frac{d\tilde{r}}{\sqrt{f_{\text{H}}(\tilde{r}, m + \tilde{\mathcal{E}}, \tilde{J})}} \approx \\ &\approx 2 \int_{\tilde{r}_{\min}}^{\tilde{r}_{\max}} \left(\frac{J}{r^2} - \frac{\tilde{J}}{\tilde{r}^2} \right) \frac{d\tilde{r}}{\sqrt{f_{\text{H}}(\tilde{r}, m + \tilde{\mathcal{E}}, \tilde{J})}}. \end{aligned}$$

Разложив разность в круглых скобках, получим

$$\frac{J}{r^2} - \frac{\tilde{J}}{\tilde{r}^2} \approx \frac{\tilde{J}}{\tilde{r}^2} \left(\frac{r_g}{\tilde{r}} - 2A + 3A \right),$$

где A не зависит от r . Можно показать, что интеграл от слагаемого с $r_g/r - 2A$ не даст вклад.

3.24. (0 баллов) Если вы умеете делать замены переменных интегрирования, покажите это с помощью замены $r \rightarrow \xi = r_g/r - 2A$.

Тогда пользуясь (17), получаем ответ:

$$\Delta\varphi_{\text{gr}} - 2\pi = 2\pi \cdot 3A.$$

3.25. (0,2 балла) Выразите A через m , r_g , и J .

3.26. (0 баллов) Выразите A через геометрические параметры орбиты и получите численное $\Delta\varphi_{\text{gr}} - 2\pi$ значение для Меркурия.

Первый Хинт — 28.05.2025 20:00 (МСК)

Второй Хинт — 30.05.2025 12:00 (МСК)

Финал Пятого Эпизода — 01.06.2025 18:00 (МСК)

Разбор Пятого Эпизода — 01.06.2025 18:00 (МСК)