

Кубок VI ЛФИ

10.s06.e02

– Это невозможно!
– Это наука!
Назад в будущее

Время

Время шло.

И так обычно не слишком людная мастерская Ганса в это дождливое утро ощущалась особенно пусто. Возможно, причина в несвойственном этому месту беспорядке? По всему полу были раскиданы скомканные листы с понятными только автору выкладками и схемами, а некогда бережно хранимые инструменты и приборы были хаотично раскиданы без какой либо системы на столах и стеллажах. Даже книги, обычно аккуратно расставленные по полкам, теперь были разбросаны как попало, а некоторые и вовсе валялись раскрытыми, с загнутыми углами пожелтевших страниц и следами чашек кофе на них.

Любой, кто знал Ганса, после одного взгляда на состояние мастерской первым делом захотел бы сообщить об ограблении. Но, подобно завязкам в классических детективах, из мастерской ничего не исчезло, кроме самого Ганса. Резкий порыв ветра захлопнул окно, и звук шелеста разбросанных черновиков, как и шум идущего снаружи дождя, скрылись на улице.

В мастерской осталось лишь тикание часов.

Введение

В этой задаче вам предстоит изучить устройство наручных часов.

Механизм их работы можно разбить на пять составных частей, которые представлены на рис. 1.

Из-за диссипации для работы любого механизма необходима энергия. Например, в настенных часах (часы с маятником и кукухой) ее источником служит гиревой механизм. В наручных же часах таким источником энергии является пружинный двигатель. При заводе часов движение передается к валу (1), к которому прикреплен один из концов плоской пружины (2), выполненной в форме улитки. Пружина скручивается и накапливает энергию. В свою очередь второй конец пружинной ленты прикреплен к стенке заводного барабана (3), который в дальнейшем передает накопленную энергию на шестеренки (колесную систему), связанные с минутной, секундной, часовой и годовой



Рис. 1: Схема часового механизма

стрелками (на рисунке не показаны). Для того, чтобы контролировать вращение шестеренок, а значит и стрелок часов, существует спусковой механизм и регулятор, которые не позволяют колесной системе неограниченно раскручиваться. Они состоят из трех частей:

- Анкер (рычаг).
- Спусковое (анкерное) колесо — зубчатое колесо, которое толкает анкер.
- Балансир — представляет из себя пружину, которая сжимается и разжимается с определенной частотой.

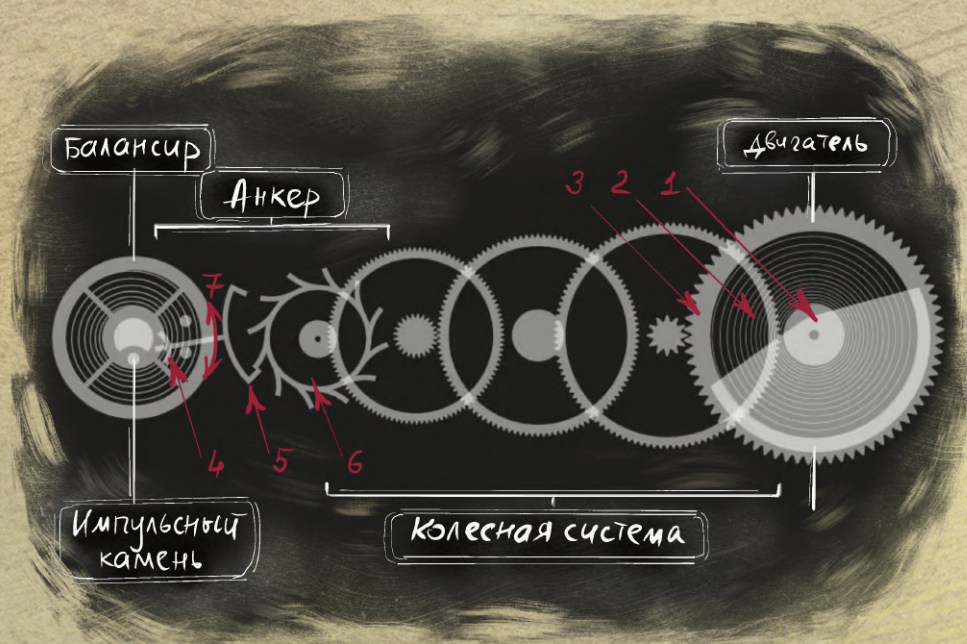


Рис. 2: Схема часового механизма. 1 – валик, 2 – заводная пружина, 3 – заводной барабан, 4 - рожек анкерной вилки, 5 – палета, 6 – анкерное колесо, 7 – направление движения анкерной вилки. Механическое движение осуществляется в двух параллельных плоскостях, которые в свою очередь параллельны плоскости рисунка. В первой плоскости расположен балансир, во второй плоскости расположены анкер, колесная система и двигатель. Взаимодействие между плоскостями осуществляется только через импульсный камень.

Палеты (5), установленные на анкере, удерживают анкерное колесо (6) до тех пор, пока анкерная вилка не сдвинется и не допустит поворота на один зубец. Перемещение (7) анкерной вилки возможно благодаря тому, что импульсный камень, установленный на балансира, периодически бьет по рожку анкерной вилки (4), то с одной, то с другой стороны.

Часть I. Спиральная пружина

Спиральная пружина — это центральный элемент наручных часов, поскольку она используется как в баланси́ре, так и в двигателе, однако их функции отличаются. В баланси́ре она используется как элемент, совершающий гармонические колебания, в то время как в двигателе она используется исключительно как аккумулятор энергии, который компенсирует потери в механической системе.

В этом пункте Вам предлагается найти модуль кручения такой пружины и период колебаний баланси́ра.

Рассмотрим пружину в виде спирали, покоящуюся на гладкой горизонтальной поверхности стола. Она сделана из стальной ленты толщиной b , высотой h (по оси, направленной перпендикулярно плоскости стола), длиной L и модулем Юнга E . Если приложить момент сил к обоим концам этой спирали, то она скрутится (или раскрутится) на дополнительный угол относительно своего положения равновесия. *Модулем кручения пружины* называется коэффициент пропорциональности между моментом силы и этим дополнительным углом поворота.

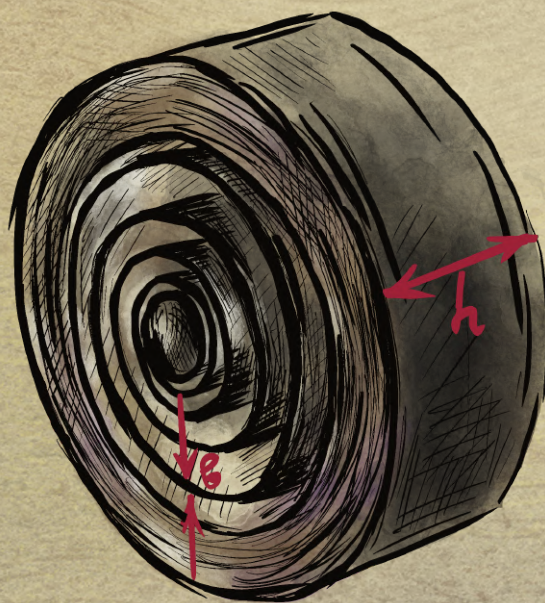


Рис. 3: Пружина в свободном состоянии

1. (1 балл) Считая известным тот факт, что момент силы, скручивающий пружину, прямо пропорционален углу ее поворота относительно положения равновесия в первой степени, и используя расширенный метод размерностей ([ищи здесь](#)), найдите модуль кручения такой пружины.
2. (1 балл) Масса — это мера инертности тела для поступательного движения. Если тело совершает вращательное движение, то вместо массы используют понятие *момента инерции* тела I . Когда спиралевидная пружина вращается вокруг оси, проходящей через её центр и направленной перпендикулярно плоскости витков, её момент инерции равен $I = m\rho^2$, где m — масса пружины, а ρ — некоторый эффективный радиус инерции пружины. Используя расширенный метод размерностей, получите формулу для периода вращательных колебаний такой пружины с точностью до постоянного множителя.

Часть II. Балансир

В идеальной механической системе балансир совершает периодическое движение с постоянным периодом и без затухания, обеспечивая равномерный ход часов.

В реальности это не так, и существует множество факторов, из-за которых часы начинают отставать или спешить. Например, тепловое расширение или ударное воздействие. В данном разделе вам предлагается изучить эти эффекты. ~~Нане дело предложить. Ване дело — отказаться.~~

Тепловое расширение

Считая, что в результате теплового расширения все длины пружины увеличились на 2%, найдите:

1. (0,5 балла) На сколько процентов изменится период колебаний таких часов;
2. (0,5 балла) Абсолютную ошибку, набегаящую в таких часах за сутки реального времени.

Удар

Для рассмотрения ударного воздействия будем рассматривать не спиралевидную пружину, а более простую модель осциллятора в виде грузика на пружине характер движения которого полностью аналогичен тому, как колеблется балансир в наручных часах, однако, для анализа он заметно проще и привычнее.

Рассмотрим грузик массы m на гладкой горизонтальной поверхности, колеблющийся на горизонтальной пружине жесткостью k . Обозначим буквами x и v – координату, отсчитываемую от положения равновесия, и скорость груза соответственно, а буквой A – максимальное отклонение груза от положения равновесия (амплитуду колебаний). В этом случае зависимость координаты груза от времени при таком движении имеет вид:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0),$$

где $\omega = \sqrt{k/m}$ – частота гармонических колебаний, выражение в скобках называется фазой гармонических колебаний, а φ_0 – начальная фаза колебаний.

3. (0 баллов) ~~Снаеибо, что не отрицательные баллы~~ Найдите зависимость скорость груза от времени.

Пусть груз совершает такие колебания, как вдруг, в некоторый момент времени по нему наносят короткий удар, т.е. такой удар, что его продолжительность много меньше периода колебаний. Будем считать, что модуль изменения скорости груза равен $\Delta v < v_{max}$, где v_{max} – это максимальная скорость груза в процессе движения до удара, а удар направлен по линии, вдоль которой груз совершает колебания. Найдите, на сколько из-за удара изменится конкретно этот период движения груза, если:

4. (0,5 балла) Удар произошел в момент максимального отклонения груза от положения равновесия. Считайте, что груз толкнули в ту же сторону, в которую он двигался незадолго до момента удара. Как изменится ответ, если скорость сообщить в противоположную сторону? Ответ дайте в терминах Δv , v_{max} , ω .

5. (0,5 балла) Удар произошел в момент времени, когда груз проходит положение равновесия. Считайте, что груз толкнули в ту же сторону, в которую он двигался в момент удара. Ответ дайте в терминах Δv , v_{max} , ω .
6. (0,5 балла) Удар произошел в момент времени, когда скорость груза, деленная на частоту его колебаний, в $\sqrt{3}$ раз больше координаты груза. Считайте, что груз толкнули в ту же сторону, в которую он двигался в момент удара. Ответ дайте в терминах Δv , v_{max} , ω .

Помимо неточности хода, механические часы могут остановиться из-за диссипации энергии ввиду наличия трения в механической системе. Процессы потери энергии мы также будем анализировать на примере груза на пружине.

Сухое трение

Рассмотрим груз массы $m = 100$ г на горизонтальной поверхности, совершающий колебания на горизонтальной пружине жесткостью $k = 100$ Н/м. Коэффициент трения между грузом и поверхностью равен $\mu = 0,4$. Считая $g = 10$ м/с², найдите:

7. (0,3 балла) Размер области в случае остановки груза, в которой он не возобновит свое движение.
8. (0,3 балла) Пусть груз отвели на расстояние $A = 25,5$ см и отпустили без начальной скорости. Сколько полных колебаний должен совершить груз до момента полной остановки?
9. (0,3 балла) Какой путь пройдет груз от начала движения до момента полной остановки?

Вязкое трение

Пусть тот же груз находится на гладкой горизонтальной поверхности и совершает колебания на той же пружине. Однако на него теперь действует сила вязкого трения, такая, что она пропорциональна скорости движения груза. В этом случае закон движения будет описываться уравнением:

$$x(t) = Ae^{-\gamma t} \cos \Omega t,$$

где A – амплитуда колебаний, γ – коэффициент затухания, а $\Omega = \sqrt{\omega^2 - \gamma^2}$ – частота таких колебаний. Считая, что $A = 25,5$ см, $\gamma = 0.01$ с⁻¹ найдите:

10. (0,3 балла) Отношение энергии запасенной в осцилляторе к потерям за период.
11. (0,3 балла) Путь, который пройдет тело за первые 500 полных колебаний.

Часть III. Заводной барабан

В двигателе спиралевидная пружина скручена в форме улитки так, что один конец прикреплен к валику, а другой — к заводному анелевому барабану. На рисунке слева представлена пружина в полностью спущенном состоянии, а справа в полностью заведенном. В первом случае число витков n_1 , во втором случае число витков n_2 . При большом числе витков спирали крутящий момент, который она развивает, можно считать пропорциональным этому числу витков. Поэтому для того, чтобы в полностью заведенной пружине было запасено как можно большее количество энергии и часы нужно было заводить как можно реже, стремятся максимизировать число оборотов.

В данном разделе вам предлагается и вы все также можете отказаться найти, при какой геометрии реализуется этот случай.

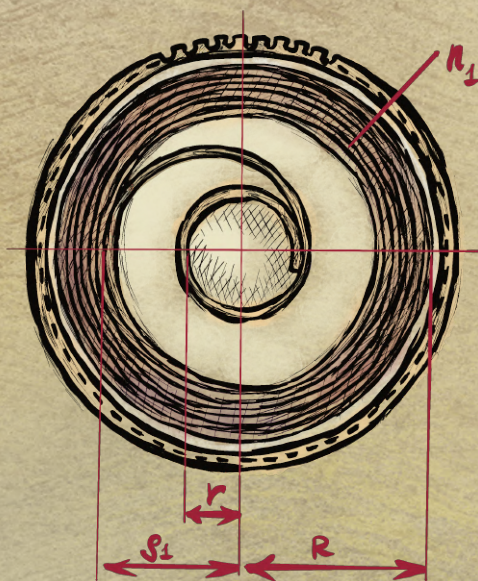


Рис. 4: Положение пружины в барабане в спущенном состоянии

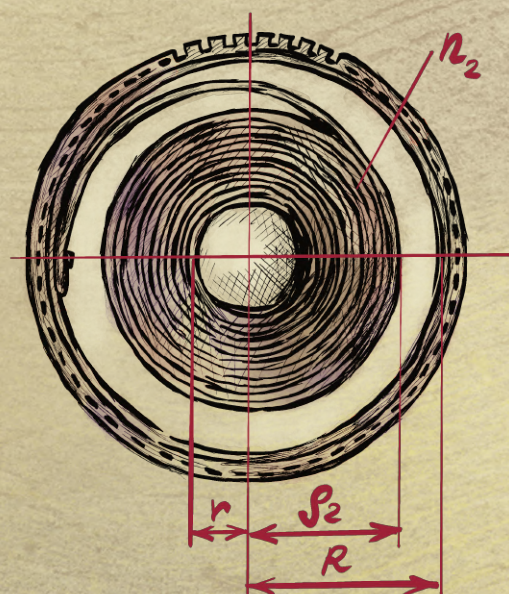


Рис. 5: Положение пружины в барабане в заведенном состоянии

Пусть ρ_2 — внешний радиус туго заведенной пружины, ρ_1 — внутренний радиус спущенной пружины, r — радиус валика, R — радиус заводного барабана, b — толщина пружины, L — её длина.

1. (1 балл) Считая R , r и b известными, определите, при каком отношении ρ_1 к ρ_2 число оборотов барабана до полного спуска будет максимальным.
2. (0,25 балла) Получите в этом случае зависимость $R(b, L, r)$
3. (0,25 балла) Используя полученные ранее результаты, определите максимальное число оборотов барабана n_{max} , считая, что в реальном механизме $r = R/3$, а толщина пружины $b = R/45$.

В реальных часах зависимость крутящего момента от числа оборотов барабана не является линейной. На рисунке 6 изображен график такой экспериментальной зависимости. Верхняя кривая характеризует завод пружины, а нижняя её спуск.

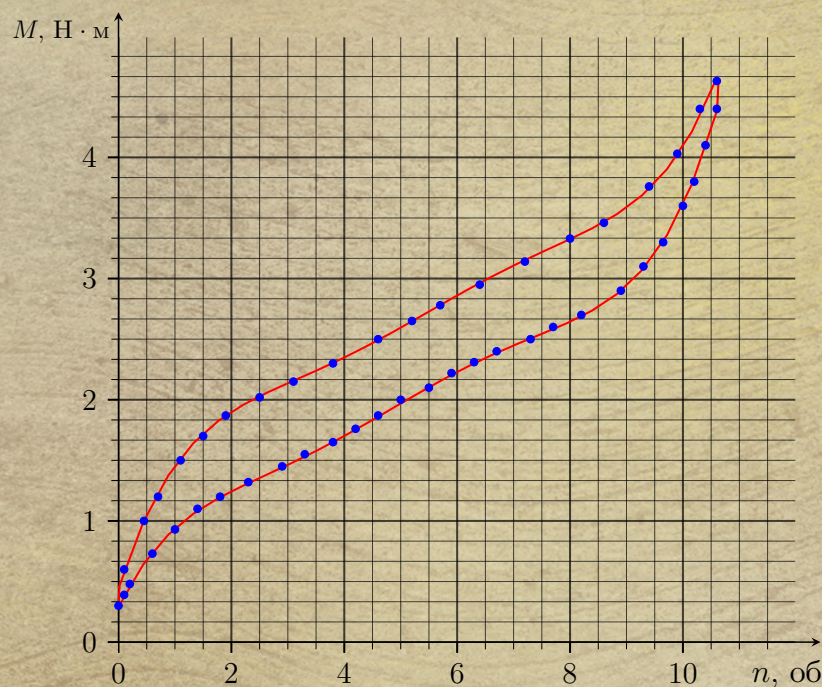


Рис. 6: График экспериментальной зависимости $M(n)$

4. (1 балл) Пользуясь экспериментальной зависимостью, определите коэффициент полезного действия пружины η .

Часть IV. Анкер

В данном разделе задачи вам все так же предлагается рассмотреть механику процесса тактового хода часов.

Мы будем анализировать движение в двух плоскостях: плоскость балансира и плоскость анкера, колесной системы и двигателя. Эти плоскости связаны друг с другом через упор в виде импульсного камня, который пересекает обе эти плоскости и жестко закреплен на диске балансира на некотором расстоянии от оси его вращения (см. рис. 2)).

Балансир создает периодический сигнал, частоту которого в дальнейшем мы будем использовать для задания шага временной шкалы.

Анкер, колесная система и двигатель используются для того, чтобы в момент прохождения положения равновесия балансира на короткий промежуток времени с ним контактировал анкер через импульсный камень и тем самым осуществлял “подкачку” энергии без существенного изменения периода.

Более детально рабочий цикл механизма происходит следующим образом:

Фаза разблокировки (unlocking):

- Импульсный камень движется против часовой стрелки и входит внутрь рожка анкерной вилки.
- Происходит первое столкновение импульсного камня с внутренней поверхностью рожка анкерной вилки.

- Поворот анкера освобождает зубчатое колесо.

Фаза передачи энергии (impulse):

- Освобожденное зубчатое колесо начинает вращаться под действием момента заведенной пружины.
- Практически одновременно происходят второе и третье столкновения в анкерной системе, сопровождающие начало разгона балансира. Анкерная вилка передает момент балансиру через импульсный камень и происходит импульсный разгон колеблющейся части.

Фаза гашения (drop):

- Импульсный камень выходит из анкерной вилки.
- Практически одновременно происходят четвертое и пятое столкновения, сопровождающие блокировку анкером зубчатого колеса через контакт со следующим его звеном и торможение анкера об ограничивающий упор.

Далее освободившийся и получивший порцию энергии от двигателя колебательный механизм продолжает свое гармоническое движение, дойдя до положения максимального отклонения, после чего разворачивается, и далее происходит повторение того же процесса разгона с теми же ударами, при движении в противоположном направлении с точностью до использования в процессе ударов симметрично отраженных участков анкера.

1. (1 балл) Считая момент вращающей силы в запасающей пружине постоянным и равным M , эффективный коэффициент передачи момента к балансиру через зубчатое колесо, колесную систему, анкер и импульсный камень между ударами 3 и 4 равным n , общий момент инерции балансира равным I и много больше моментов инерции зубчатого колеса, колесной системы и анкера, модуль кручения пружины балансира равным k , угловую амплитуду колебаний равную φ , время между третьим и четвертым ударами равным t определите какую долю энергии от запасенной в колебательном движении теряет система за один период колебаний.
2. (0,5 балла) По прикрепленному [аудиофайлу](#) определите с точностью до 0,001 с минимальное время между всеми фазами рабочего цикла механизма. Опишите и обоснуйте ход своих рассуждений. Для анализа аудиофайла рекомендуем использовать программу Audacity или ее аналоги.

Первый Хинт — 05.05.2025 20:00 (МСК)

Второй Хинт — 07.05.2025 12:00 (МСК)

Окончание Первого Эпизода — 09.05.2025 20:00 (МСК)

Разбор Первого Эпизода — 09.05.2025 20:00 (МСК)