

# Кубок ЛФИ

10.s05.e05

*Мы сильны настолько, насколько мы едины,  
и слабы настолько, насколько разведены.*

*Гарри Поттер и Кубок огня*

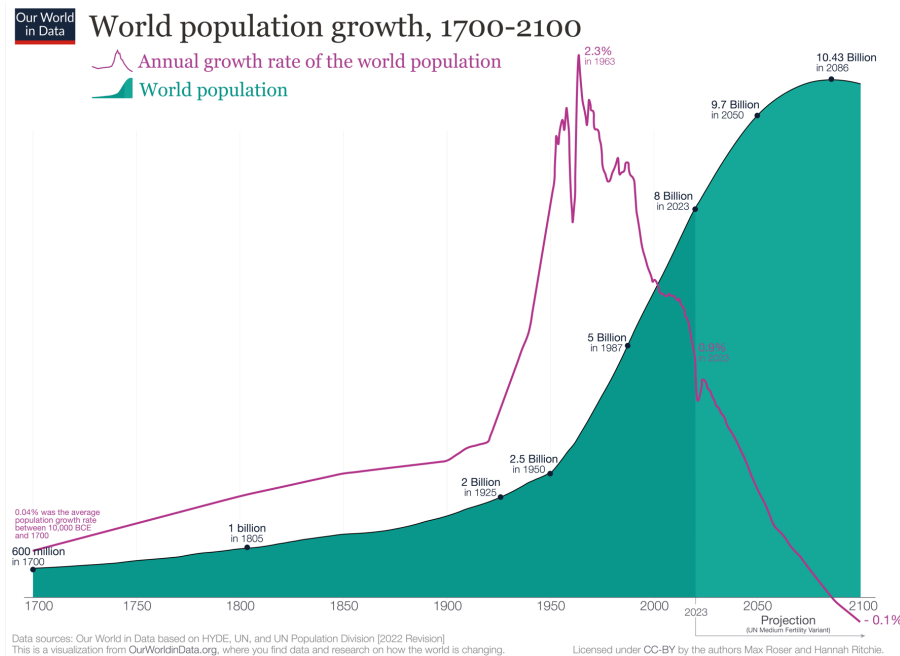
## Синтез

Среди нескольких старых книг на столе кабинета лежала папка с пометкой «Разработки Ганса Зингера».

Сильный порыв ветра в незакрытое окно обсерватории перевернул титульную страницу...

## Часть 1. Ядерные реакции (2,5 балла)

Согласно общедоступным [данным](#) в 20 веке начался активный рост населенности нашей планеты.



- (0 баллов) По графику определите, в каком году была пиковая скорость роста населения, т. е. процент прироста населения за год был максимален, и чему она равнялась в процентах.
- (0,2 балла) Считая, что с 2023 года скорость роста населения будет равна пиковой скорости роста в 20 веке, определите, через сколько лет на каждом квадратном метре суши будет стоять один человек. Считайте, что радиус Земли 6400 км, а доля суши от общей поверхности планеты равна  $1/3$ .

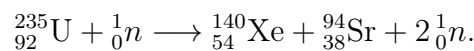
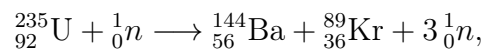
В связи с быстрым ростом населения земного шара так же быстро растет и энергопотребление. На сегодняшний день человечество потребляет примерно  $Q = 10^{21}$  Дж в год. Возобновляемые источники энергии (ветро, гидро, солнечная энергетика и так далее) способны обеспечить до  $3Q$  в год, но, к сожалению, они не решают энергетические проблемы. Полученная с их помощью энергия оказывается достаточно дорогой и требует дополнительных условий (наличие ветра, большого количества солнечных дней в году и т. д.). Мощность, генерируемая этими источниками, очень сильно меняется во времени (например, ночью солнечная панель не вырабатывает энергию), что требует создания огромных дорогостоящих хранилищ энергии.

Исторически человечество научилось очень активно использовать природные ископаемые: нефть, уголь, газ и т. д. К сожалению, их запасы ограничены и неравномерно распределены по планете. Например, запасы нефти порядка  $15Q$ , угля —  $150Q$ . Кроме того, сжигание углеводородов ведет к выбросу парниковых газов и влияет на климат.

Помимо этого, химические источники энергии обладают низкой энергоэффективностью.

3. (0,4 балла) Оцените **энергоэффективность** сжигания химического топлива, т. е. количество энергии (в эВ) на один нуклон, выделяющееся при сгорании одного килограмма угля  $^{12}\text{C}$ . Считайте, что его удельная теплота сгорания  $31$  МДж/кг.

По этим причинам человечество ищет альтернативные источники энергии. В ходе исследований по ядерной физике было установлено, что ядра одних элементов могут превращаться в ядра других. Например:



4. (0,4 балла) Используя понятие дефекта масс, оцените энергоэффективность каждой реакции.
5. (0 баллов) На сколько порядков энергоэффективность ядерного топлива больше энергоэффективности химического?

В ходе реакций деления часто образуются нестабильные изотопы, в результате распада которых происходит цепочка ядерных превращений.

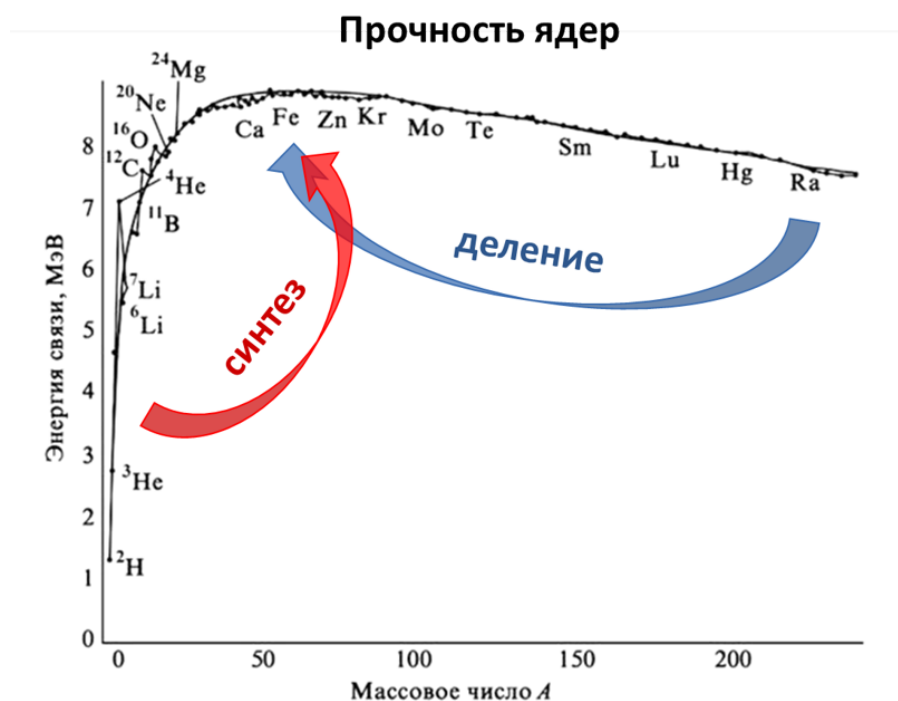
6. (1,5 балла) Рассмотрим возможные цепочки распадов ядра  $^{235}_{92}\text{U}$ , в конце которых образовалось ядро  $^{207}_{82}\text{Pb}$ . Будем считать, что для тяжелых ядер возможны только три типа реакций: альфа распад, бета-минус распад и протонная эмиссия. Считая, что их вероятности относятся как  $20 : 10 : 1$  соответственно, определите наиболее вероятный набор продуктов распада.

**Замечание.** В реальности протонная эмиссия еще на порядок менее вероятна, чем в приведенном примере, и происходит с искусственно созданными изотопами химических элементов.

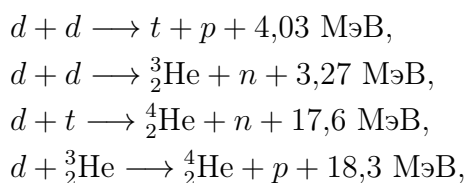
Из всего вышесказанного следует, что ядерная энергия решает проблемы человечества с обеспечением энергоресурсами, однако, при работе ядерных электростанций происходит накопление радиоактивных отходов и возможны техногенные катастрофы, что вынуждает продолжать поиск альтернативных источников энергии.

## Часть 2. Термоядерный синтез (0,5 балла)

Со временем было установлено, что энергия может выделяться не только при реакциях деления тяжелых ядер, но и при синтезе легких элементов из начала таблицы Менделеева. Наглядная демонстрация этого факта приведена на рисунке, где изображена зависимость энергии связи ядер от атомного номера. Из него видно, что элементы, находящиеся левее Fe, стремятся к синтезу, а находящиеся правее — к делению.



С практической точки зрения наибольший интерес представляют следующие реакции синтеза:



где  $d$ ,  $t$  — это ядра дейтерия и трития. Важно отметить, что первая и вторая реакции равновероятны.

1. (0 баллов) Найдите энергоэффективность реакций термоядерного синтеза.

В отличие от полезных ископаемых и ядерного топлива, дейтерий широко распространен в природе и содержится в воде. Один атом дейтерия приходится на 6500 атомов водорода.

2. (0,5 балла) Сделайте оценку снизу для количества бензина, которое надо сжечь, чтобы получить энергию, равную той, что выделится в реакции синтеза на дейтерии, выделенном с одного стакана воды (0,33 л). Удельная теплота сгорания бензина 44 МДж/кг.

Для протекания реакций ядерного синтеза нужно преодолеть кулоновский барьер отталкивания взаимодействующих частиц. Поэтому для реализации управляемого термоядерного синтеза (УТС) предпочтительно использовать изотопы водорода, которые имеют минимальный заряд среди всех других ядер. Но даже для них реакции термоядерного

синтеза могут идти только при очень высоких температурах, на уровне десятков кэВ ( $1 \text{ эВ} = 11604 \text{ К}$ ). При таких температурах любое вещество переходит в состояние плазмы.

### Часть 3. Плазма (1 балл)

Плазма – ионизованный газ, т.е. двухкомпонентная система, состоящая из электронов и положительно заряженных ионов. Для изучения свойств этой системы необходимо знать характерные масштабы расстояния и времени.

#### Характерный масштаб расстояний

Важным свойством плазмы является квазинейтральность, т.е. равенство положительного и отрицательного заряда в любом достаточно большом объёме. Характерным пространственным масштабом в плазме будем называть расстояние, на котором допустимо нарушение квазинейтральности.

Для оценки такого расстояния необходимо рассмотреть экранирование потенциала точечного заряда в плазме. Будем считать, что концентрации электронов и ионов подчиняются распределению Больцмана:

$$n(r) = n_0 \exp\left(-\frac{q\varphi(r)}{kT}\right),$$

где  $n_0$  – нормировочная константа для обеих компонент,  $\varphi$  – потенциал электрического поля в котором находится заряд,  $q$  – его величина,  $T$  – температура.

**Замечание.** В плазме температура ионов и электронов могут различаться, но в данной задаче мы будем считать, что эти компоненты находятся в термодинамическом равновесии.

Из Нулевого Хинта Третьего Эпизода вам известно уравнение Пуассона, которое имеет вид:

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0},$$

где  $\rho$  – плотность заряда. В одномерном случае данное выражение примет вид:

$$(\varphi)''_{xx} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

1. (0,5 балла) Считая, что  $q\varphi \ll kT$ , обезразмерьте уравнение Пуассона и найдите характерный масштаб разделения зарядов.

#### Характерное время в плазме

При нарушении квазинейтральности плазмы возникающие электрические поля будут стремиться его устранить.

2. (0,2 балла) Рассмотрим полностью ионизованную плазму при нормальных условиях, в каждом кубическом сантиметре которой находится по  $7 \cdot 10^{16}$  электронов и ионов. Предположим, что в глубине плазмы произошло полное разделение зарядов в слое толщиной 1 см: все электроны собрались вблизи одной плоскости, а ионы вблизи

другой. Тогда на границе области, занимаемой плазмой, возникнут нескопменсированные заряды. Найдите величину электрического поля, возникающего в этом слое.

3. (0,3 балла) Найдите время, за которое заряды вернуться в положение равновесия.

При создании реактора УТС необходимо решить две основных проблемы. Первая состоит в том, чтобы стационарно удерживать плазму с необходимыми параметрами в течение достаточного длительного времени, а вторая — в том, чтобы поток тепла и частиц не повреждали стенки реактора. Оба этих вопроса решаются при помощи применения магнитных полей и анализируются в задаче 11 класса.

В задаче 10го класса мы будем знакомиться с понятием плазмы на примере самостоятельного газового разряда, а также сравним процесс поддержания разряда и критерий выхода на нулевую полезную мощность термоядерного реактора.

#### Часть 4. Критерий Гёренге Нулевой цикл (2,5 балла)

В этом разделе вам предлагается получить критерий, выполнение которого обеспечит выход на нулевую полезную мощность термоядерной электростанции.

Пусть в некотором ограниченном объеме находится плазма, состоящая из ядер дейтерия и трития, а также электронов, образовавшихся в процессе их ионизации (~~никогда такого не было и вот опять~~) и имеющих ту же температуру, что и все их окружение (~~не опять, а снова~~). Каждый из типов ядер ведет себя ~~ненотребно~~ как идеальный газ с концентрацией  $n$  и температурой  $T$ . Дейтерий и тритий вступают в реакцию термоядерного синтеза  $d + t \rightarrow \frac{4}{2}\text{He} + n + 17,6 \text{ МэВ}$ .

Будем рассматривать сильно упрощенную модель, в которой сечение столкновения ядер не зависит от их скорости. Т.е. два ядра вступают в реакцию синтеза, если сблизятся на расстояние, меньшее известной суммы некоторых эффективных радиусов  $R = r_1 + r_2$ . Считайте, что все продукты реакций, не взаимодействуя с плазмой, достигают стенок реактора и передают ему всю свою энергию в виде тепла, а те, в свою очередь, преобразуют ее в электричество и уже оно в дальнейшем используется для нагрева/поддержания температуры плазмы, при этом описанная система обратной связи работает с КПД  $\eta$ . Известно, что если «остановить» механизм обратной связи и процессы ядерных реакций, то плазма начнет остывать с характерным временем остывания  $\tau$ , которое определяется конструктивными особенностями реактора и является одним из ключевых его параметров. Здесь характерное время остывания – время, за которое плазма достигнет нулевой температуры, если будет остывать с постоянной скоростью, равной начальной.

1. (2,5 балла) При каком условии на величину  $n\tau$  возможен процесс работы реактора так, что описанная система сможет работать произвольное время и «самоподдерживаться» за счет механизма обратной связи?

#### Часть 5. Разряд и закон 3/2 (1,5 балла)

Рассмотрим простейшую модель вакуумного диода. Этот прибор состоит из двух пластин — катода и анода, помещенных в герметично запаиваемую колбу, в которой создан вакуум. При значительном увеличении температуры катода начинается процесс термоэлектронной эмиссии — излучения электронов с поверхности катода. При подаче напряжения на анод возникает разгоняющая (или тормозящая — в зависимости от знака подаваемого

напряжения) разность потенциалов. В результате возникает направленное и упорядоченное движение электронов — электрический ток. Изучим зависимость этого тока от напряжения на аноде. Сделаем следующие допущения: электроны начинают своё движение с поверхности катода с нулевой начальной скоростью; напряженность электрического поля на границе катод-вакуум равна нулю; пластины можно считать эквипотенциальными, их линейные размеры много больше расстояния между ними (работает приближение плоского конденсатора).

1. (0,5 балла) Запишите уравнение Пуассона для бесконечно тонкого слоя, параллельно плоскостям пластин, а также выражение для объёмной плотности электрического заряда для произвольной координаты в зависимости от концентрации.
2. (0,2 балла) Воспользуйтесь законом сохранения энергии и получите связь скорости частицы и потенциалом в данной точке пространства.
3. (0,3 балла) Найдите потенциал электрического поля между пластинами в зависимости от координаты.
4. (0,5 балла) Получите зависимость тока от напряжения анода.

## Часть 6. Самостоятельный разряд (2 балла)

Рассмотрим качественно процесс возникновения самостоятельного газового разряда.

Пространство между двумя плоскими проводящими электродами (катодом и анодом), находящихся на расстоянии  $d$  друг от друга, заполнено газом, а сами электроды подключены к источнику постоянного напряжения.

Процесс формирования газового разряда состоит из двух частей. Первая — формирование электронами в процессе ионизации тока электронов и ионов в среде заполняющее пространство между электродами. Вторая часть — выбивание ионами новых вторичных электронов из катода.

Рассмотрим каждый из этих процессов более детально.

Пусть между электродами в силу каких-то причин образовался электрон. Под действием электрического поля, он начинает разгоняться и двигаться от катода к аноду и в процессе движения сталкиваться с молекулами газа, ионизуя их. Образовавшиеся новые электроны и ионы также придут в движение к аноду и катоду соответственно. При этом электроны будут образовывать все новые и новые электронно-ионные пары, а ионы этого делать не будут (т.к. их скорость, которая является в этом процессе одним из определяющих параметров, будет существенно меньше, чем скорость электронов). По этой причине, если при ударе ионов о катод ничего не будет происходить, то через какое-то время процесс протекания тока в газе прекратится, т.к. все электроны достигнут анода, ионы — катода, а новые заряды не будут образовываться.

Однако при попадании иона на катод с некоторой вероятностью происходит выбивание электронов, что заново запускает процесс образования электронно-ионных пар в газе.

В этом разделе вам предлагается исследовать данный процесс.

Будем называть коэффициентом объёмной ионизации  $\alpha$  количество электронно-ионных пар, образующихся на единице длины пути электрона, а коэффициентом вторичной ионно-электронной эмиссии  $\gamma$  — среднее количество электронов, выбиваемых одним ионом из ка-

тогда. Внешней ионизацией мы будем называть некоторый процесс, который создает первичные электроны. Это могут самые разные процессы: ультрафиолетовое или  $\gamma$  излучение, проходящее через газ, дополнительный проводник, создающий небольшой ток электронов и так далее. В нашем рассмотрении мы будем считать, что этот процесс локализован в области катода.

1. (0,3 балла) Известно, что электронный ток в области катода равен  $I_{ek}$ , в который входит ток внешнего ионизатора и ток вторичных электронов, выбитых ионами с катода. Коэффициент объемной ионизации  $\alpha$  известен и постоянен во всем объеме между электродами. Найдите электронный ток в области анода.
2. (0,3 балла) Определите, чему равен ионный ток в области катода  $I_{ik}$ .
3. (0,7 балла) Выразите электронные токи катода и анода  $I_{ek}$  и  $I_{ea}$  через ионизационный ток  $I_i$ .

Пробоем называем ситуацию, когда электронный ток  $I_{ea}$  бесконечно нарастает при сколько угодно малом ионизационном токе. Если после возникновения пробоя убрать внешний ионизатор и ток не прекращается, то разряд называют самостоятельным: ионизация поддерживается процессами в самом разряде.

4. (0,7 балла) Определите, при каком условии на  $\alpha$ ,  $\gamma$  и  $d$  произойдет пробой и разряд станет самостоятельным?

**Замечание.** Вам может быть полезен следующий математический факт:

$$(e^{\alpha x})' = \alpha e^{\alpha x}$$

Первая подсказка — 29.05.2024 20:00 (МСК)

Вторая подсказка — 31.05.2024 15:00 (МСК)

Окончание пятого тура — 02.06.2024 18:00 (МСК)

Разбор пятого тура — 02.06.2024 18:00 (МСК)