Hint 2

ВАЖНО! Задача является одновременно и хинтом, и альтернативой к основной задаче. Три важных момента:

1. Вы можете продолжать присылать решение основной задачи.
2. В любой момент до финального дедлайна вы можете перейти на решение *альтернативной задачи*. Если вы это делаете, то в самом начале решения напишите: *Я перехожу на решение альтернативной задачи!* В этом случае Штрафной коэффициент за альтернативную задачу будет равен

$$0{,}7 \cdot \sum_i \frac{k_i \cdot p_i}{10},$$

где p_i — балл за пункт, а k_i — штрафной коэффициент за соответствующий пункт на момент перехода на Альтернативную задачу. Другими словами, максимальный балл за альтернативную задачу равен максимальному баллу, который вы можете получить в момент перехода на нее, умноженному на 0,7. Заметим, что штрафной коэффициент не может быть меньше 0,1. Также напоминаем, что решения основной задачи с этого момента не проверяются. Будьте внимательными!

3. Задача состоит из нескольких пунктов. Штрафной множитель, заработанный **до этого** применяется ко всем пунктам. В дальнейшем каждый пункт оценивается как отдельная задача. Если вы присылаете решение без какого-либо пункта, то его решение считается Incorrect. Более подробно о начислении баллов для составных задач смотрите в Правилах проведения Кубка. **С момента перехода на альтернативную подборку возможности вернуться к решению основной задачи нет.** Также, после перехода на альтернативную задачу **баллы за основную задачу обнуляются**.

Введение

Время шло незаметно и когда стрелки часов пробежали немалую часть круга, Ёжик наконец-то размял затёкшие иголки и решил побродить по комнате обсерватории. Его внимание привлёк книжный шкаф, где он нашёл несколько интересных книг и заметки к ним. Он довольно зафыркал и стал их внимательно изучать.

Теоретическая часть

Классический метод размерностей

Пример 1. Задача Галилея Определите с точностью до постоянного множителя расстояние, проходимое за данный промежуток времени телом, свободно падающим из положения покоя.

Решение

Шаг 1. Выявление определяющих параметров. В этом примере расстояние s зависит от времени движения t и от ускорения свободного падения g. Также разумно предположить, что расстояние может зависеть от массы тела m.

Шаг 2. Составление системы уравнений и ее решение. Запишем уравнение в виде:

$$s = f(g,t,m),$$

где $f(g,t,m)$ – это степенная функция своих переменных вида $f = \mathrm{Const} \cdot g^{\alpha} t^{\beta} m^{\gamma}$. Тогда мы получаем уравнение на размерности:

$$L = L^{\alpha} T^{\beta - 2\alpha} M^{\gamma},$$

где L, T, M – единицы измерения длины, времени и массы соответственно, откуда получаем систему уравнений вида:

$$\begin{cases} 1 = & \alpha \\ 0 = & \beta - 2\alpha \\ 0 = & \gamma. \end{cases}$$

Решая получившуюся систему уравнений, находим, что $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\gamma = 0$. Откуда находим ответ:

$$s = \mathrm{Const} \cdot gt^2.$$

Заметим, что мы также получили, что расстояние не зависит от массы тела.

При использовании метода размерностей также используют терминологию безразмерных параметров. В предыдщем примере можно было бы сказать, что у нас есть один безразмерный параметр $\pi_1 = s/(gt^2)$.

Пример 2. Сила натяжения в кольце. Найдите с точностью до множителя силу натяжения проволочного кольца, вращающегося в собственной плоскости вокруг оси, перпендикулярной плоскости вращения и проходящей через центр кольца.

Решение

Шаг 1. Выявление определяющих параметров.

Нас интересует зависимость силы F от угловой скорости ω. Поскольку задача напрямую связана с динамикой, то результат может зависеть от массы кольца m, а также от геометрии задачи, которая однозначно задается радиусом кольца R.

Шаг 2. Составление системы уравнений и ее решение.

Используя метод размерностей мы получаем уравнение:

$$F = \mathrm{Const} \cdot m^\alpha R^\beta \omega^\gamma.$$

Поскольку сила имеет размерность LMT^{-2}, мы получаем уравнение на степени:

$$LMT^{-2} = M^\alpha L^\beta T^\gamma.$$

Откуда получаем, что $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\gamma = -2$, а сила определяется выражением:

$$F = \mathrm{Const} \cdot mR\omega^2$$

Заметим, что в этой задаче можно сформировать только один безразмерный параметр $\pi_1 = \dfrac{F}{mR\omega^2}$

Пример 3. Ареометр Никольсона. Найдите с точностью до множителя формулу для периода колебания цилиндра массы m, плавающего в жидкости, при небольшом смещении его вниз от положения равновесия.

Решение

Шаг 1. Выявление определяющих параметров.

В данной задаче этот шаг делается не так однозначно как в предыдущих примерах. Ясно, что период t может зависеть от массы ареометра m, должен определяться силой Архимеда, которая зависит от плотности жидкости ρ и ускорения свободного падения g, а также должна зависеть от геометрии задачи, которая задается радиусом основания цилиндра или, что равносильно его площадью S.

Заметим, что от высоты цилиндра геометрия задачи не зависит, т.к. при ее изменении пропорционально изменяется и глубина погружения.

Шаг 2. Составление системы уравнений и ее решение.

Из предыдущего пункта получаем формулу:

$$t = \mathrm{Const} \cdot m^\alpha s^\beta \rho^\gamma g^\delta,$$

что равносильно:

$$T = M^\alpha L^{2\beta} L^{-3\gamma} M^\gamma L^\delta T^{-2\delta}$$

Откуда получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 0 = & 2\beta - 3\gamma + \delta \\ 0 = & \alpha + \gamma \\ 1 = & -2\delta. \end{cases}$$

Мы получили систему из трёх уравнений и четырёх неизвестных. Одна из переменных останется неизвестной и найти её можно из эксперимента (или применяя расширенный метод размерностей, что будет предложено вам сделать в Альтернативной задаче). Оставляя в качестве параметра, через который выражаются другие величины степень α получаем, что $\beta = -\frac{3\alpha}{2} + \frac{1}{4}$, $\gamma = -\alpha$, $\delta = -\frac{1}{2}$. Т.е.

$$t = \mathrm{Const} \cdot m^{\alpha} s^{-3\alpha/2+1/4} \rho^{-\alpha} g^{-1/2}.$$

В этом примере можно скомпоновать два безразмерных параметра $gt^2/\sqrt{s}$ и $ms^{3/2}/\rho$.

Расширенный метод размерностей

Пример 4. Расширенный метод размерностей. Пуля выпущена с начальной скоростью u в горизонтальном направлении на высоте h от земли. Определите дальность горизонтального полёта пули.

Решение

Определяющими параметрами этой задачи являются дальность полёта по горизонтали L, начальная скорость пули u, ускорение свободного падения g и высота в момент выстрела h. Получаем формулу:

$$L = \mathrm{Const} \cdot u^{\alpha} h^{\beta} g^{\gamma},$$

откуда получаем формулу на размерности:

$$L_x = \left(L_x T^{-1}\right)^{\alpha} L_z^{\beta} \left(L_z T^{-2}\right)^{\gamma}.$$

Решая эту систему уравнений находим, что $\alpha = 1$, $\beta = 1/2$, $\gamma = -1/2$, откуда находим, что дальность полёта равна:

$$L = \mathrm{Const} \cdot v\sqrt{\frac{h}{g}}.$$

Замечание. Используя классический метод размерностей, останется одна неизвестная степень.

Альтернативная задача

1. *(0,5 балла)* Используя метод размерностей найдите период колебаний математического маятника и покажите, что он не зависит от массы груза.
2. *(1 балл)* Пуля выпущена с начальной скоростью u под углом α к горизонтальной плоскости. Используя расширенный метод размерностей, найдите дальность полёта с точностью до постоянного множителя.
3. *(1 балл)* Используя расширенный метод размерностей, найдите с точностью до постоянного множителя период колебаний ареометра Никольсона.
4. *(2 балла)* В таблице приведена вольт-амперная характеристика вакуумной лампы. В ней представлены показания анодного тока I от напряжения U (см таблицу). Считая, что $I = \alpha U^{\beta}$, определите α и β.

№	U, В	I, мкА
1	0,5	3,24
2	1,0	12,7
3	1,5	24,62
4	2,0	38,05
5	2,5	55,54
6	3,0	73,2
7	4,0	116,82
8	5,0	158,14
9	12,0	188,82
10	15,0	911,9
11	20,0	1320,5
12	60,0	1634

5. *(3 балла)* Кольцо радиусом R равномерно заряжено по своей длине и имеет заряд Q. Найдите радиальную компоненту электрического поля E_r в точке, которая находится на расстоянии $r \ll R$ от центра кольца в его плоскости.

6. *(2,5 балла)* Небольшая шайба находится на плоскости Oxy в точке с известными координатами $x_0 > 0$ и $y_0 > 0$. Известно, что шайба движется так, что ее проекции скорости на оси Ox и Oy имеют зависимости $v_x = A/x^3$ и $v_y = Ay/x^4$ соответственно, где A – некоторая размерная постоянная величина. Найдите уравнение траектории шайбы в координатах Oxy.