



Метод изображений

Теория

Рассмотрим следующую задачу. Найдите напряженность электрического поля в произвольной точке пространства A для системы зарядов и проводящих тел с известным потенциалом (см. рисунок).

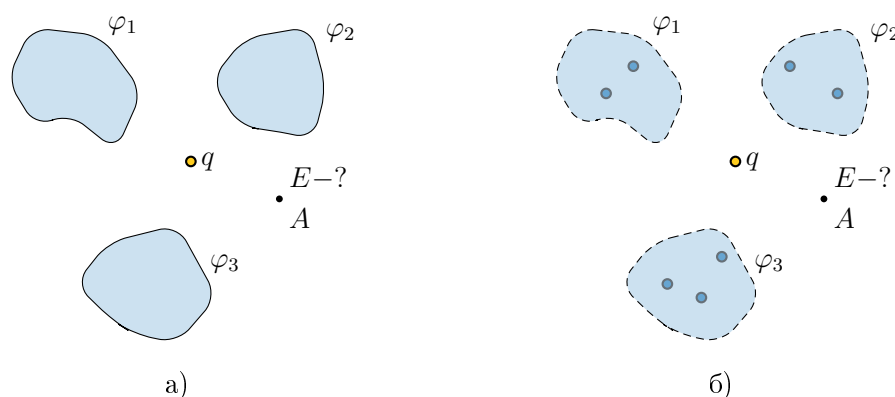


Рис. 1: Рисунок слева – исходная задача, рисунок справа – эквивалентная задача, где вместо проводников заряды-изображения.

Сложность задачи состоит в том, что на поверхностях проводников индуцируются заряды, которые дают вклад в напряженность электрического поля в рассматриваемой точке. При этом распределение заряда неизвестно.

При решении такого типа задач бывает эффективным такой прием как *метод изображений*. Суть метода изображена на рисунке и состоит в следующей последовательности действий:

1. Находим систему зарядов-изображений которые располагаются *внутри* проводников так, что суммарный потенциал от зарядов-изображений и исходной системы зарядов на поверхностях проводников точно такой же, как в условии задачи.
2. Ищем напряженность электрического поля в любой точке *вне* проводника как суперпозицию напряженностей электрических полей от исходной системы зарядов и зарядов-изображений. Результат будет точно совпадать с напряженностью электрического поля у исходной задачи.

Мы не будем доказывать справедливость данного метода, но сделаем несколько замечаний.

Замечание 1. Энергия взаимодействия заряда и индуцированных зарядов на поверхности проводника равна энергии взаимодействия зарядов и зарядов-изображений.

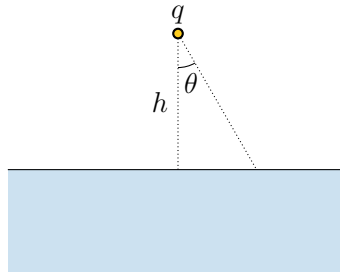
Замечание 2. Обычно этот метод применяется для сферических поверхностей.

В качестве «нулевок» мы предлагаем несколько классических задач.

Плоскости

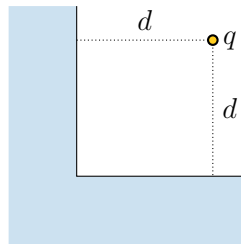
(0 баллов) Не нужно присылать решение задач из этого раздела!

1. Точечный заряд q расположен над проводящим полупространством на расстоянии h . Постройте систему изображений данного заряда. Найдите силу, действующую на точечный заряд со стороны индуцированных зарядов. Найдите значение напряженности электрического поля на поверхности проводника, и, зная ее, найдите зависимость поверхностной плотности заряда от угла θ .



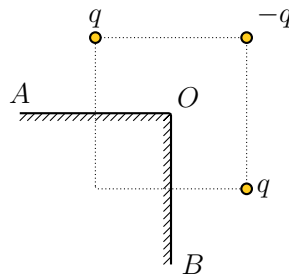
Ответ. $F = k \frac{q^2}{4h^2}$, $E(\theta) = k \frac{q}{h^2} 2 \cos^3 \theta$, $\sigma(\theta) = \frac{q}{h^2} \frac{\cos^3 \theta}{\pi}$.

2. Постройте систему изображений и найдите силу действующую на точечный заряд со стороны индуцированных зарядов.



Ответ. $F = k \frac{2\sqrt{2}-1}{8} \frac{q^2}{d^2}$

3. Три разноименных точечных заряда расположены в вершинах квадрата с диагональю $L = 50$ см, как показано на рисунке, где O - центр квадрата, AOB - прямой угол, образованный двумя проводящими плоскостями. Найдите силу, действующую на заряд $-q$, если $q = 11$ мкКл.

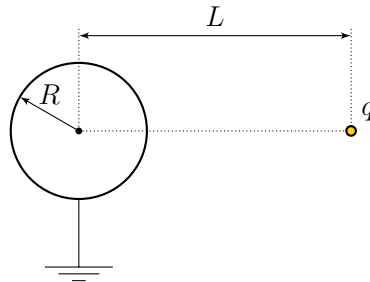


Ответ. $F = k(2\sqrt{2} - 1) \frac{q^2}{L^2} \approx 2$ Н

Сферы

(0 баллов) Не нужно присылать решение задач из этого раздела!

4. Заряд q расположен на расстоянии $L > R$ от центра заземленной сферы радиуса R . найдите величину и положение заряда изображения. Чему равна сила взаимодействия точечного заряда с зарядами индуцированными на поверхности сферы?



Ответ. $F = k \left(\frac{q}{L^2 - R^2} \right)^2 LR$

5. Докажите, что потенциал заряженного проводящего шара радиуса R с зарядом Q во внешнем поле равен

$$\varphi_0 + kQ/R,$$

где φ_0 – потенциал внешнего поля в центре шара. Используя этот результат, найдите чему равен потенциал такого проводящего шара в поле точечного заряда q , расположенного на расстоянии $L > R$ от центра шара.

Ответ. $\varphi = k \left(\frac{Q}{R} + \frac{q}{L} \right)$

6. Точечный заряд q расположен на расстоянии L от центра проводящего шара радиусом $R < L$ с зарядом Q . Чему равна сила взаимодействия точечного заряда и зарядов на поверхности шара? Постройте график зависимости силы, действующей на точечный заряд со стороны индуцированных зарядов от расстояния L для случаев $Q/q = 3$, $Q/q = 1$, $Q/q = 0$, $Q/q = -1$. Расстояние L мы рекомендуем измерять в радиусах шара, а значение силы в kq^2/L^2 .

Ответ. $F = kq \left[\frac{Q}{L^2} + qR^3 \frac{R^2 - 2L^2}{L^3(L^2 - R^2)^2} \right]$

ВАЖНО! Следующая задача является одновременно и хинтом, и альтернативой к основной задаче. Три важных момента:

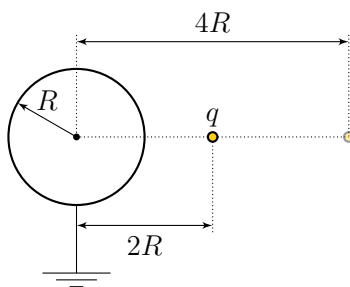
- Вы можете продолжать присылать решение основной задачи.
- В любой момент до финального дедлайна вы можете перейти на решение *альтернативной задачи*. Если вы это делаете, то в самом начале решения напишите: *Я перехожу на решение альтернативной задачи!*. В этом случае вы получаете дополнительный коэффициент в 0,7 единиц, который умножается на старый коэффициент, и решения основной задачи с этого момента не проверяются. Будьте внимательными!
- Задача состоит из нескольких пунктов. Штрафной множитель, заработанный **до этого** применяется ко всем пунктам. В дальнейшем каждый пункт оценивается как отдельная задача. Если вы присылаете решение без какого-либо пункта, то его решение считается Incorrect. Более подробно о начислении баллов для составных задач смотрите в Правилах проведения Кубка.

Альтернативная задача. Энергия.

Часть 1 (1 балл) Найдите энергию взаимодействия зарядов на поверхности проводящей сферы радиуса R с зарядом Q .

Часть 2 (2 балла) На расстоянии L от проводящей полуплоскости располагается точечный заряд. Найдите энергию взаимодействия точечного заряда с индуцированными зарядами. Заряд медленно перемещают на расстояние $2L$ по прямой линии от проводящей полуплоскости. Используя определение, через непосредственное интегрирование дифференциала работы, найдите работу по перемещению заряда. Используя полученный результат найдите изменение энергии взаимодействия индуцированных зарядов на поверхности проводника.

Часть 3 (5 баллов) На расстоянии $2R$ от центра заземленного проводящего шара радиуса R находится точечный заряд q . Заряд перемещают на расстояние $4R$ от центра шара. Чему равна работа по перемещению точечного заряда q ? Чему равно изменение энергии взаимодействия индуцированных зарядов между собой?



Часть 4 (2 балла) Решите предыдущую задачу для случая незаземленного шара с зарядом Q .