



— Почему ты не можешь просто сказать людям, что ты зебра?  
 — А почему ты не можешь сказать людям, что ты один из семи гномов?  
 — Потому что я — Фродо!  
 — А я — эффект Доплера!  
 Телесериал "Теория Большого Взрыва"

## Кода

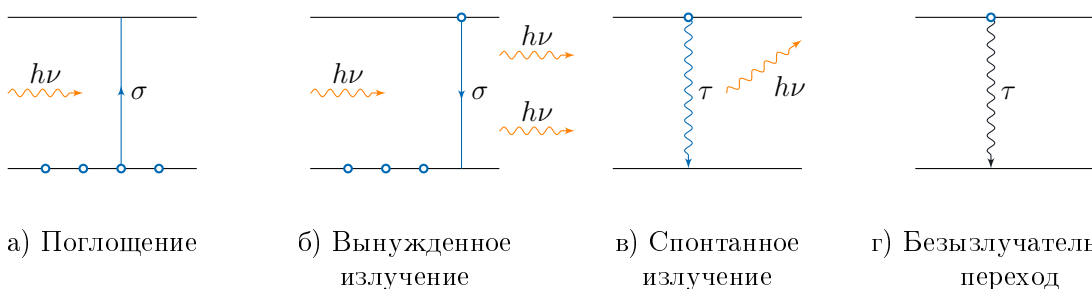
Данная задача посвящена такому разделу физики, как взаимодействие лазерного излучения с веществом. Все необходимые факты из теории будут даны в первом и втором разделах. Если у вас останутся какие-то вопросы по теории, то вы можете попробовать обратиться к жюри, возможно, они ответят что-то отличное от «без комментариев», т.к. данный раздел физики выходит за рамки школьной программы.

Удачи!

## Что умеют электроны?

В атомах электроны располагаются на энергетических уровнях. В данной задаче мы будем рассматривать только дискретные системы уровней и для начала изучим возможные типы переходов электронов между ними.

Рассмотрим двухуровневую систему, изображенную на рисунке. Нижний энергетический уровень будем называть основным состоянием, верхний уровень — возбужденным, разницу между энергиями уровней будем обозначать  $\Delta E$ .



При действии лазерного излучения на атом можно считать, что он взаимодействует с отдельными квантами электромагнитного поля, которые называются фотонами. Энергия отдельного кванта равна  $h\nu$ , где  $\nu$  — частота электромагнитного излучения. В рамках этой задачи будем считать, что фотон может взаимодействовать с атомом, только если его энергия равна  $\Delta E$  (заметим, что точное равенство не является необходимым, т.к. даже у изолированного атома есть естественная ширина линии  $\delta E$ , однако, этот факт в данной задаче не учитывается).

Возможны два варианта взаимодействия атома и фотона. Первый вариант это *поглощение фотона* (рис. 1а). Электрон, находящийся в основном состоянии может поглотить фотон с некоторой вероятностью. Вероятность поглощения отдельного фотона отдельным электронном характеризуется *сечением поглощения*  $\sigma$ . Размерность сечения поглощения —  $\text{см}^2$  (данную величину можно визуализировать себе, как некоторый размер электрона

для фотона, аналогично тому, как вводился характерный размер молекул в задачах молекулярной кинетической теории, например, при изучении длины свободного пробега). Аналогично электрон, находящийся на возбужденном уровне, может перейти в основное состояние из-за действия электромагнитного излучения, при этом он излучит фотон, который будет точно таким же (направление, частота, начальная фаза и т.д.), что и фотон, который «сбросил» электрон вниз. Такой процесс мы будем называть *вынужденным излучением*. Он характеризуется *сечением излучения фотона*, которое в точности равно сечению поглощения.

Кроме переходов, обусловленных взаимодействием излучения с атомами, возможны и другие переходы, которые называются *релаксационными*. Если электрон находится в возбужденном состоянии, то в какой-то момент он перейдет в основное состояние. При этом этот процесс может сопровождаться излучением фотона частоты  $\nu$  в случайном направлении, так называемое *спонтанное излучение* (рис. 1в), или происходить безызлучательно, когда энергия электрона переходит в тепло (рис. 1г). В рамках этой задачи мы будем пренебрегать спонтанным излучением и рассматривать только безызлучательный вариант релаксации возбуждения.

Перейдем к количественному описанию скорости изменения населенностей электронов в основном и возбужденном состояниях.

Для процессов поглощения и вынужденного излучения фотонов легко понять, чему равно число соответствующих переходов в единицу времени. Пусть  $n_1$  и  $n_2$  – концентрации электронов (т.е. число электронов на соответствующем уровне в  $1 \text{ см}^3$  вещества) в основном и возбужденном состоянии соответственно (здесь и далее мы будем характеризовать населенности уровней именно концентрацией электронов). Интенсивность света  $I$  равна энергии излучения, проходящей за единицу времени в единицу площади ( $\text{Дж}/(\text{с} \cdot \text{см}^2)$ ) и равна  $h\nu F$ , где  $F$  – плотность потока фотонов ( $\text{Штуки}/(\text{с} \cdot \text{см}^2)$ ). Ясно, что число переходов в единицу времени, обусловленных поглощением фотона, пропорционально плотности потока фотонов и концентрации электронов. Коэффициент пропорциональности в точности равен сечению поглощения (данный факт мы считаем интуитивно понятным из соображения размерности и здравого смысла). Другими словами, если мы рассматриваем **только** процесс поглощения фотонов, то верно следующее равенство:

$$\begin{cases} \dot{n}_1 = -F\sigma n_1 \\ \dot{n}_2 = F\sigma n_1 \end{cases}$$

Аналогично можно получить скорость изменения населенностей уровней для случая вынужденного излучения, для этого в предыдущей системе нужно изменить индексы в каждом уравнении:

$$\begin{cases} \dot{n}_1 = F\sigma n_2 \\ \dot{n}_2 = -F\sigma n_2 \end{cases}$$

Для количественного описания релаксационных процессов в атоме вводят характерные времена для того или иного процесса (спонтанное излучение, безызлучательная релаксация и т.д.). Будем обозначать характерное время безызлучательной релаксации  $\tau$  и определим его следующим образом. Если электрон находится в возбужденном состоянии и мы рассматриваем только процесс безызлучательной релаксации, то скорость изменения

населенности уровня будет определяться соотношением:

$$\dot{n}_2 = -\frac{n_2}{\tau}$$

1. В основном состоянии в нулевой момент времени находятся  $N$  электронов (где  $N$  – это концентрация), в возбужденном состоянии электронов нет. На систему начинает действовать постоянное лазерное излучение с плотностью потока фотонов  $F$ . Найдите зависимость населенностей уровней в основном и возбужденном состояниях от времени, рассматривая только вынужденные переходы (без учёта релаксации). Изобразите их на одном графике. Сечение поглощения  $\sigma$  считайте известным. (0,5 балла)
2. Пусть в возбужденном состоянии в нулевой момент времени находятся  $N_2$  электронов. Получите зависимость  $n_2(t)$ , рассматривая только безызлучательные переходы. Время безызлучательной релаксации  $\tau$  известно. (0,25 балла)

### Явление просветления

Рассмотрим двухуровневую систему, на которую начинает действовать лазерное излучение с постоянной плотностью потока фотонов  $F$ . Сечение поглощения  $\sigma$  и время безызлучательной релаксации  $\tau$  известны. В начальный момент времени все электроны находятся в основном состоянии, т.е.  $n_1(0) = N$ ,  $n_2(0) = 0$ .

1. Запишите систему уравнений, которая будет описывать скорость изменения населенностей уровней такой системы, с учётом вынужденных и безызлучательных переходов. (0,5 балла)
2. Начиная с некоторого момента времени можно считать, что число переходов в единицу времени из основного состояния в возбужденное будет равно числу переходов в единицу времени в обратном направлении, т.е. населенности уровней не изменяются. В этом случае говорят, что установилось *стационарное распределение* электронов по уровням. Найдите зависимости  $n_1(F)$  и  $n_2(F)$  в стационарном состоянии. Нарисуйте эти зависимости на одном графике. (0,5 балла)
3. Коэффициентом поглощения вещества называется величина:

$$\alpha = n_1\sigma - n_2\sigma.$$

Нарисуйте график зависимости коэффициента поглощения от плотности потока фотонов в случае стационарного распределения. (0,25 балла)

4. Из соображений размерности можно понять, что изменение плотности потока фотонов при распространении излучения в веществе описывается уравнением:

$$\frac{dF}{dz} = -\alpha F.$$

- (a) Найдите в случае стационарного распределения, чему равно пропускание среды толщиной  $h$ , т.е. величина  $T = F_{out}/F_0$ , где  $F_0$  — плотность потока фотонов на входе в среду,  $F_{out}$  — плотность потока фотонов на выходе из среды, в случае малой плотности потока фотонов. Запишите выражение через  $N$ ,  $F$ ,  $\sigma$ ,  $\tau$  и  $h$ . (0,25 балла)

- (b) Получите трансцендентное уравнение, которое связывает пропускание и плотность потока на входе в среду, для произвольной плотности потока фотонов. Получите зависимость через  $N$ ,  $T$ ,  $F$ ,  $\sigma$ ,  $\tau$  и  $h$ . (0,75 балла)

## Доплеровское уширение

В случае газообразных сред возможно поглощение лазерного излучения на частоте  $\nu \neq \Delta E/h$ , что обусловлено эффектом Доплера. Действительно, пусть частота лазерного излучения не равна резонансной частоте  $\nu_0 = \Delta E/h$ . В силу того, что в газах атомы находятся в неупорядоченном движении, то для атома, проекция скорости которого на направление распространения лазерного излучения равна  $V_x$ , частота лазерного излучения будет равна  $\nu_{at} = \nu(1 - V_x/c)$ . В том случае, если  $\nu_{at} = \nu_0$ , будет происходить поглощение лазерного излучения.

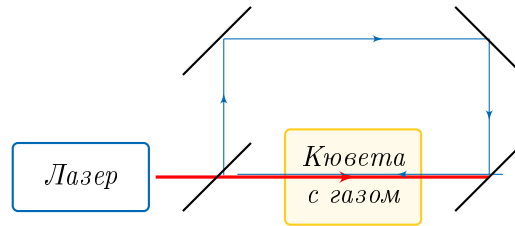
1. Используя ваши знания про распределение Максвелла, получите зависимость коэффициента поглощения от частоты лазерного излучения и изобразите ее на графике зависимости коэффициента поглощения от частоты. (1 балл)
2. При каком значении частоты лазерного излучения коэффициент поглощения будет в два раза меньше максимального? Ответ дайте в терминах  $\nu_0$ ,  $T$  (температура),  $m$  (масса отдельного атома),  $c$  (скорость света). (0,75 балла)
3. Сделайте численную оценку ширины линии  $(\nu - \nu_0)$  для D-линии натрия. Резонансная частота одного из переходов в этой линии  $5,1 \cdot 10^{14}$  Гц,  $M = 23$ , считайте, что температура газа 500 К. (0,75 балла)
4. Как будет изменяться график зависимости спектральной плотности коэффициента поглощения от частоты из предыдущего пункта при изменении плотности потока фотонов? Ответ представьте в виде графиков для трех разных плотностей потоков фотонов («малой», «средней», «большой»). Подумайте, какая величина является характерной плотностью потока фотонов, с которой надо сравнивать плотность потока фотонов лазерного излучения. (0,5 балла)

Многим из вас может быть не знакомо распределение Максвелла. В этом случае вы можете его изучить, используя литературу, например, Бутиков, Кондратьев, Уздин "Физика. Книга 3. Строение и свойство вещества". Заметим, что для дальнейшего решения задачи достаточно понимать, как выглядит зависимость в пункте один, а ее точное выражение не нужно.

## Экспериментальное исследование

### Двухуровневая схема

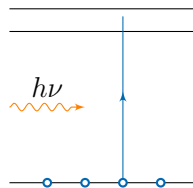
Рассмотрим газ, для которого характерна система из двух уровней. Поместим газ в прозрачную кювету и рассмотрим экспериментальную установку, представленную на рисунке. Мощное лазерное излучение (красная линия) сперва попадает на делительную пластинку. В том же направлении распространяется основная часть лазерного излучения (*импульс накачки*), и лишь малая часть отражается (*пробный пучок*, синяя линия). В качестве источника излучения используется лазер, у которого возможно плавно перестраивать частоту излучения.



1. Пусть частота лазерного излучения меньше резонансной частоты перехода электрона между уровнями  $\nu < \nu_0$ . Направим ось  $X$  в направлении распространения мощного лазерного излучения. Найдите проекции скоростей атомов, которые будут поглощать мощное излучение накачки, и проекцию скоростей атомов, которые будут поглощать пробный пучок. (0,5 балла)
2. Нарисуйте график зависимости числа электронов в возбужденном и основном состоянии от проекции скорости атома на ось  $X$ . График можно отнормировать на максимальное значение (два графика по 0,5 балла за каждый график).
3. Дайте ответ на предыдущие два пункта для случая, когда  $\nu = \nu_0$  (0,25 балла).
4. Нарисуйте график зависимости спектральной плотности коэффициента поглощения пробного пучка от частоты (0,75 балла).

### Трехуровневая схема

Одной из основных проблем спектроскопии является разрешение двух близлежащих возбужденных уровней (см. рис). В этом случае из-за эффекта Доплера при возбуждении атомов лазерным излучением линии поглощения сливаются, т.к. для любой частоты электромагнитных волн найдутся электроны, у которых будет подходящая проекция скорости движения атома, чтобы произошел переход или на первый, или на второй возбужденный уровень. Для решения этой проблемы и была предложена экспериментальная установка из предыдущего пункта.



Обозначим резонансную частоту перехода из основного состояния в первое возбужденное  $\nu_1$ , а частоту перехода из основного состояния во второе возбужденное –  $\nu_2$ . Для определенности будем считать  $\nu_2 > \nu_1$ . Сечения поглощения для этих переходов будем считать одинаковыми.

1. Нарисуйте график зависимости спектральной плотности коэффициента поглощения излучения пробного импульса от частоты. (1,5 балла)

Автор задачи: Л.М. Колдунов

Первая подсказка — 01.06.2020 16:00 (МСК)

Вторая подсказка — 03.06.2020 16:00 (МСК)

Финал шестого тура — 05.06.2020 23:59 (МСК)