Кубок ЛФИ

11.s01.e06

Hint 1

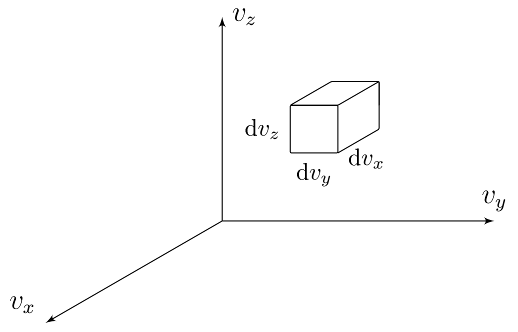
Hint 1

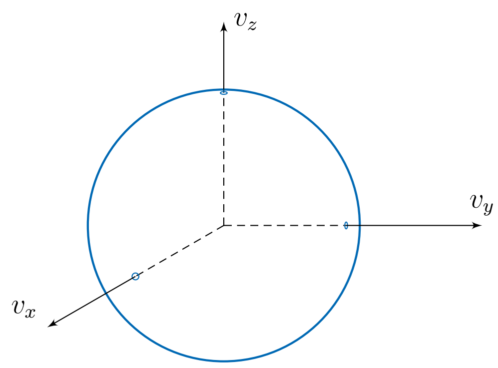
В качестве первого хинта будет использована краткая выжимка из теории распределения Максвелла.

Обозначим через dN_v среднее число молекул идеального газа, имеющих компоненты скорости, лежащие в интервале между v_x и $v_x + dv_x$, v_y и $v_y + dv_y$, v_z и $v_z + dv_z$. Можно доказать, что верно следующее равенство:

$$dN_v = N\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m(v_x^2+v_y^2+v_z^2)}{2kT}\right) dv_x dv_y dv_z, \tag{1}$$

где N — общее число молекул, m — масса одной молекулы, k — константа Больцмана, T — температура газа. Физический смысл этого выражения состоит в том, что если мы выделим небольшой объем $dv_x dv_y dv_z$ в пространстве скоростей, то dN_v будет равно числу молекул газа, у которых скорости принадлежат этому небольшому объему. Другими словами, величина dN_v/N равна вероятности того, что случайно выбранная молекула имеет скорость, у которой проекции принадлежат интервалам $[v_x, v_x + dv_x]$, $[v_y, v_y + dv_y]$ и $[v_z, v_z + dv_z]$. Формула (1) называется распределением Максвелла.





Заметим, что это не единственный способ, которым можно записать это распределение. Например, можно записать выражение для вероятности того, что абсолютная величина скорости будет принадлежать интервалу $[v, v + dv]$. В этом случае говорят, что мы переходим от распределения по проекциям скоростей к распределению по абсолютным значениям скорости. В пространстве скоростей это равносильно тому, что вместо элементарного объема $dv_z dv_y dv_z$ мы рассматриваем тонкостенную сферу радиусом v и толщиной dv (см.

рис.). Заменяя элементарный объем $dv_z dv_y dv_z$ на объем тонкостенной сферы $4\pi v^2 dv$, мы получаем распределение по абсолютным значениям скоростей:

$$dN_v = N \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2kT}\right) 4\pi v^2 dv. \tag{2}$$

Запишем еще один вариант распределения Максвелла – распределение Максвелла по энергиям. Обозначим кинетическую энергию отдельной молекулы

$$\varepsilon = \frac{mv^2}{2}.$$

Диференцируя последнее уравнение и умножая его на скорость молекулы v, мы получаем:

$$v^2 dv = \sqrt{\frac{2\varepsilon}{m}} \frac{d\varepsilon}{m}.$$

Откуда, используя (2), получаем распределение по энергиям:

$$dn_\varepsilon = N \frac{2}{\sqrt{\pi (kT)^3}} e^{-\dfrac{\varepsilon}{kT}} \sqrt{\varepsilon} d\varepsilon.$$